



MAT0101 MATEMATİK I

BÖLÜM 3
FONKSİYONLAR

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

GİRİŞ

Fonksiyon kavramı, matematikte en önemli kavramlardan biridir. Temel düzeyin ötesinde matematik öğrenimi için elementer fonksiyonların, onların özelliklerinin ve grafiklerinin sağlam bir şekilde anlaşılması gereklidir.

Fonksiyonlar

Bu kesimde *fonksiyon* kavramını önce genel olarak iki küme arasında bir eşleşme olarak tanıatacağız. Sonra bu iki kümenin her ikisinin de reel (gerçek) sayılar kümesi olduğu fonksiyonlarla ilgileneceğız.

Bu konuda ele alacağımız 5 alt başlık yer alır.

Alt Başlıklar

- **İki Değişkenli Denklemler**
- **Bir Fonksiyonun Tanımı**
- **Denklemlerle Belirtilen Fonksiyonlar**
- **Fonksiyon Gösterimi**
- **Uygulamalar**

- İki Değişkenli Denklemler

ÖRNEK 1 Nokta-nokta çizim

Aşağıdaki denklemlerin grafiklerini kabataslak çiziniz.

$$(A) y = 9 - x^2 \quad (B) x^2 = y^4$$

- Fonksiyonun Tanımı

TABLO 1

Tanım Kümesi	Değer Kümesi
<i>Number</i>	<i>Cube</i>
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

TABLO 2

Tanım Kümesi	Değer Kümesi
<i>Number</i>	<i>Square</i>
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

TABLO 3

Tanım Kümesi	Değer Kümesi
<i>Number</i>	<i>Square root</i>
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2
9	3
9	-3

Tablo1-3 üzerinde düşününüz. Tablo 1 ve Tablo 2 fonksiyon belirtir fakat Tablo 3 belirtmez.

Neden belirtmez? Bu tabloların incelenmesi *fonksiyon* teriminin anlamını açıklıyor mu?

- **Denklemlerle Belirtilen Fonksiyonlar**

Bir denklemle verilen fonksiyonun tanım kümesi verilmediğinde bu fonksiyonun tanım kümesi, denklemde bağımsız değişkenin yerine konulduğunda reel değerler elde edilen tüm reel sayıların kümesidir. Değer kümesi, tanım kümesindeki girdi değerleriyle eşleşen tüm çıktıları içeren bir kümedir. Görüntü kümesi, değer kümesinde bulunan ve tanım kümesindeki elemanlarla eşleşen elemanların kümesidir.

- **Fonksiyon Gösterimi**

f fonksiyonunun tanım kümesindeki her bir x elemanı için $f(x)$ sembolü, x elemanının f fonksiyonundaki görüntüsünü temsil eder. Eğer x bir girdi değeri ise o zaman $f(x)$ eşleşen çıktı değeridir. Eğer x , f fonksiyonunun tanım kümesinde bir eleman değilse o zaman f , x elemanı için tanımlı değildir ve $f(x)$ mevcut değildir.

ÖRNEK 4**Fonksiyonun Değerinin Bulunması**

$$f(x) = 12 / (x - 2), g(x) = 1 - x^2 \text{ ve } h(x) = \sqrt{x - 1}$$

olduğuna göre aşağıdaki sayıları hesaplayınız.

(A) $f(6)$

(B) $g(-2)$

(C) $h(-2)$

(D) $f(0) + g(1) - h(10)$

- **Uygulamalar**

Herhangi bir üretim şirketinin **maliyetleri** ve **gelirleri** olur. Bu kitap boyunca toplam maliyeti C , toplam geliri de R ile göstereceğiz.

Eğer $R < C$ ise şirket **zarar** edecektir. $R = C$ ise şirket başa baş noktasında olacaktır. $R > C$ ise şirket **kar** elde edecektir.

Aşağıdaki tabloda p , x milyon kamera satıldığında bir kameranın toptan satış fiyatını göstermektedir. Fiyat düşerken, satılan kamera sayının yükseldiğine dikkat ediniz.

Tablo 4 Fiyat-Talep

x (Milyon)	p (\$)
2	87
5	68
8	53
12	37

ÖRNEK 7

Fiyat-Talep ve Gelir Modellemesi

Bir analizci, özel analiz teknikleri (regresyon analizi) kullanarak Tablo 4 teki verileri modellemek için aşağıdaki fiyat-talep fonksiyonunu elde etti:

$$p(x) = 94.8 - 5x, 1 \dots x \dots 15$$

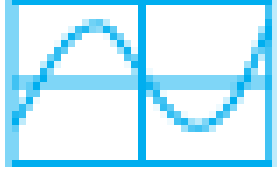
(A) Tablo 4 teki verilerin yerlerini belirleyiniz. Sonra aynı koordinat sisteminde fiyat-talep fonksiyonunun grafiğini kabataslak çiziniz.

(B) Bu kamera için şirketin gelir fonksiyonunu ve bu fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

(C) Gelirleri en yakın milyon dolara yuvarlayarak Tablo 5 i doldurunuz.

Tablo 5 Gelir	
x (Milyon)	$R(x)$ (Milyon \$)
1	90
3	
6	
9	
12	
15	

(D) Tablo 5 teki verilerin yerlerini belirleyiniz.
Daha sonra bu noktaları kullanarak gelir
fonksiyonunun bir grafiğini kabataslak çiziniz.



(E) Grafik izme makinesinde gelir
fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Elementer Fonksiyonlar: Grafikler ve Dönüşümler

Bu kesimde, f fonksiyonu ile yakından ilgili olan g , h ve k fonksiyonlarının grafiklerinin, f nin grafiğiyle ilişkilerini göreceğiz. Bu ilişkileri anlamayla kazanılan bakış birçok farklı fonksiyonların grafiklerini anlamamıza ve yorumlamamıza yardım edecektir.

Bu konuda ele alacağımız 4 alt başlık yer alır.

Alt Başlıklar

- **Elementer Fonksiyonlar Sınıfına Başlangıç**
- **Düřey ve Yatay Kaymalar**
- **Yansıma, Açılma ve Daralma**
- **Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar**

- **Elementer Fonksiyonlar Sınıfına Başlangıç**

TANIM Basit Elementer Fonksiyonlar

$f(x) = x$ Birim fonksiyon

$h(x) = x^2$ Kare fonksiyon

$m(x) = x^3$ Küp fonksiyon

$n(x) = \sqrt{x}$ Karekök fonksiyon

$p(x) = \sqrt[3]{x}$ Küp kök fonksiyon

$g(x) = |x|$ Mutlak değer fonksiyonu

ÖRNEK 1

Temel Elementer Fonksiyonların Değerlerini Hesaplama

Bir önceki slaytta kuralları verilen elementer fonksiyonların aşağıda verilen x sayılarındaki değerlerini hesaplayınız.

$$(A) x = 64$$

$$(B) x = -12.75$$

*Yaklaşık değerleri, dört ondalık hanesine kadar yuvarlayınız.

- **DüŖey ve Yatay Kaymalar**

ÖRNEK 2

(A) $y = |x|$ in grafiği ile iliŖkili olan $y = |x| + 4$ ve $y = |x| - 5$ in grafikleri nasıldır? Bu üç fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek cevabınızı doğrulayınız.

(B) $y = |x|$ in grafiği ile iliŖkili olan $y = |x + 4|$ ve $y = |x - 5|$ in grafikleri nasıldır? Bu üç fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek cevabınızı doğrulayınız.

- **Yansımalar, Açılmalar ve Daralmalar**

ÖRNEK 4

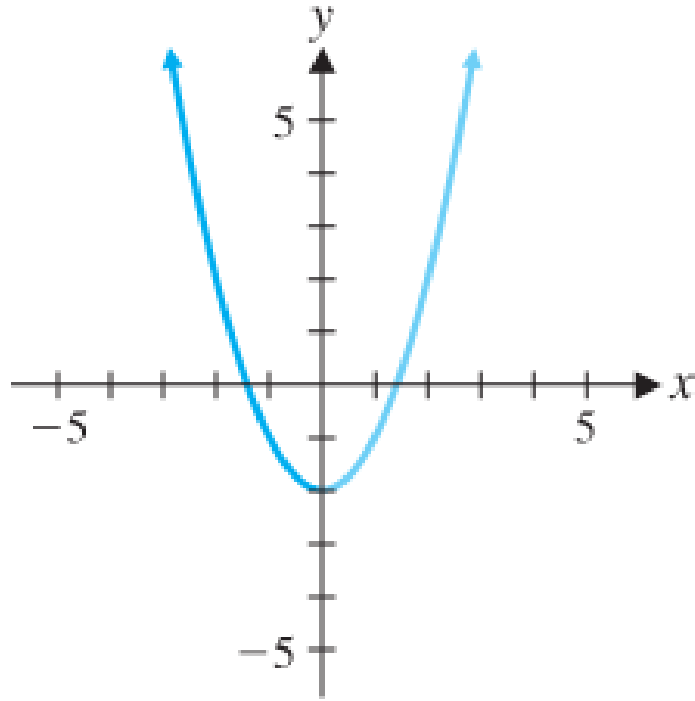
(A) $y = |x|$ in grafiği ile ilişkili olan $y = 2|x|$ ve $y = 0.5|x|$ in grafikleri nasıldır? Bu üç fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek cevabınızı doğrulayınız.

(B) $y = |x|$ in grafiği ile ilişkili olan $y = -2|x|$ in grafiği nasıldır? Her iki fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek cevabınızı doğrulayınız.

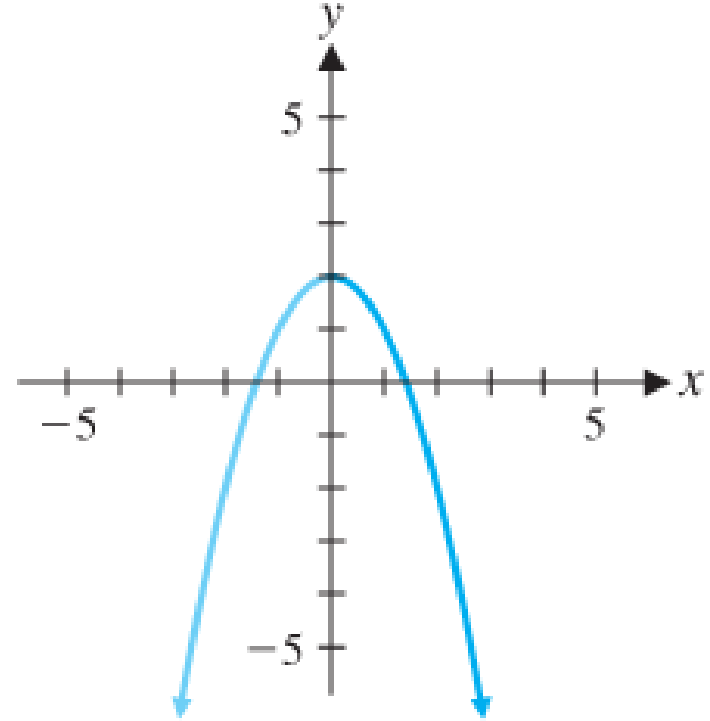
- **Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar**

Tanımları bir kuraldan daha fazlasını içeren fonksiyonlar **parçalı tanımlı fonksiyonlar** olarak adlandırılır.

Böyle fonksiyonların grafiğini çizmek için, tanım kümesinin uygun kısmı üzerindeki her bir kuralın grafiğini çizmek gerekir



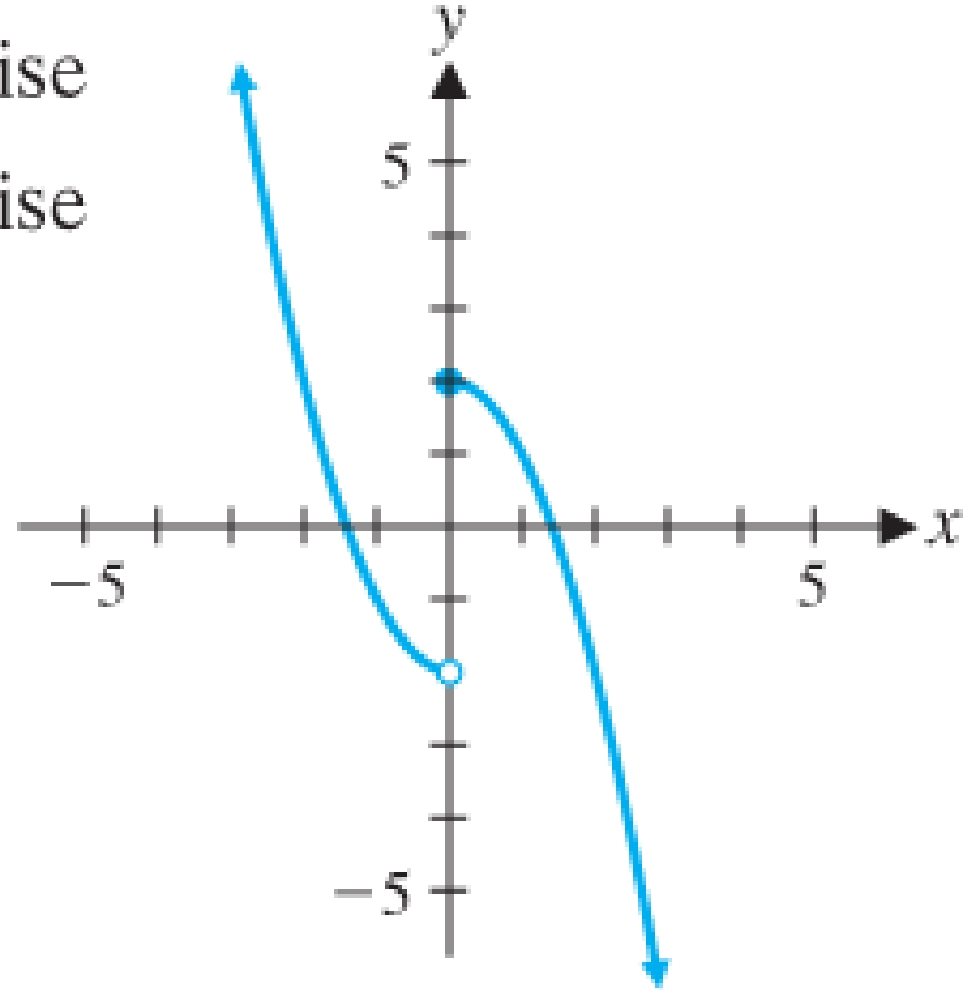
(A) $y = x^2 - 2$



(B) $y = 2 - x^2$

Şekil 10 Parçalı tanımlı fonksiyonların grafik çizimi

$$(C) y = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \text{ ise} \\ 2 - x^2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



**Şekil 10 Parçalı tanımlı
fonksiyonların grafik
çizimi**

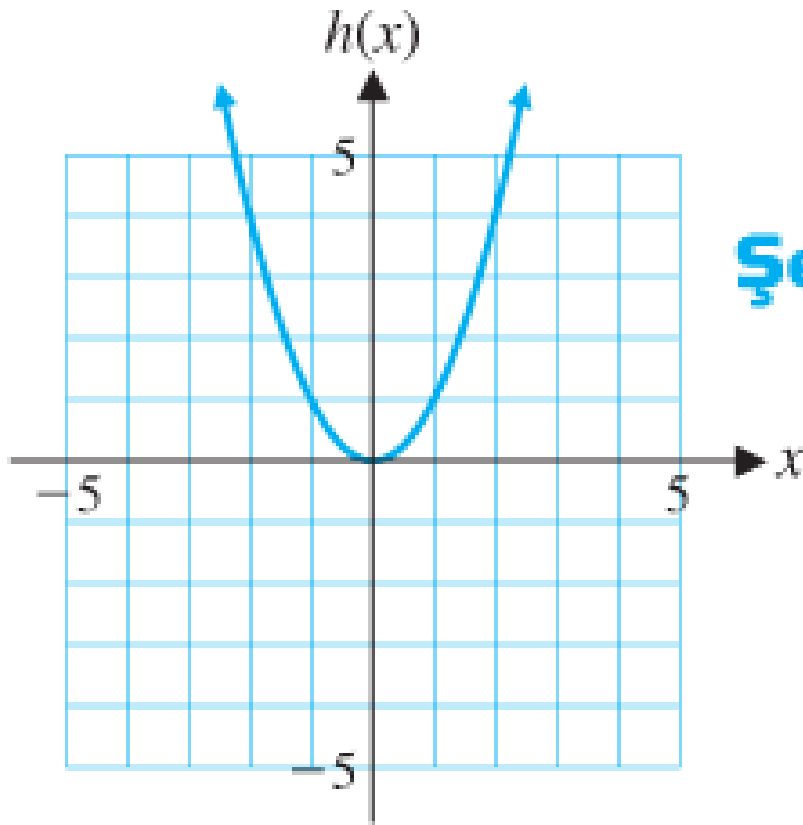
İkinci Dereceden (Karesel) Fonksiyon

Bu konuda ele alacağımız 3 alt başlık yer alır.

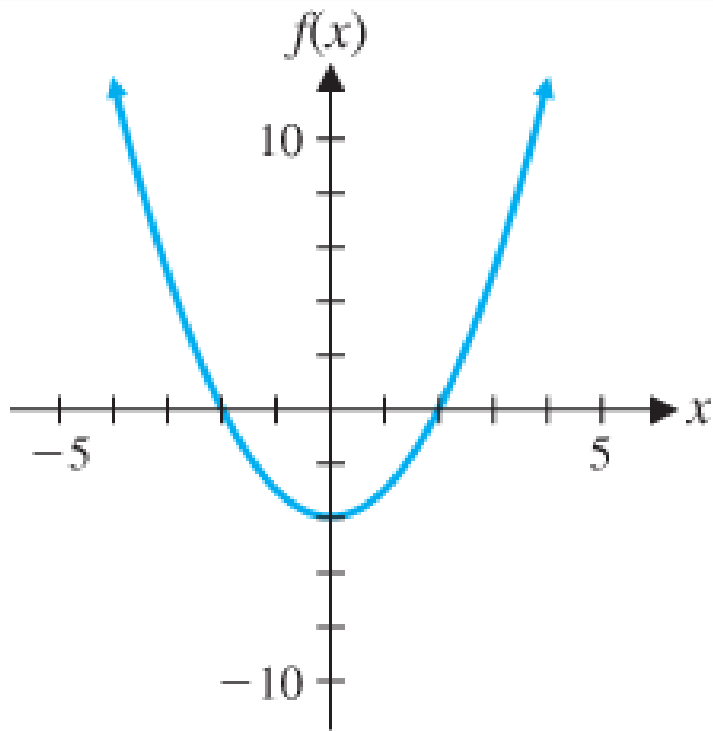
Alt Başlıklar

- **Karesel (ikinci dereceden) Fonksiyonlar, Denklemler ve Eşitsizlikler**
- **İkinci Dereceden Fonksiyonların ve Grafiklerinin Özellikleri**
- **Uygulamalar**

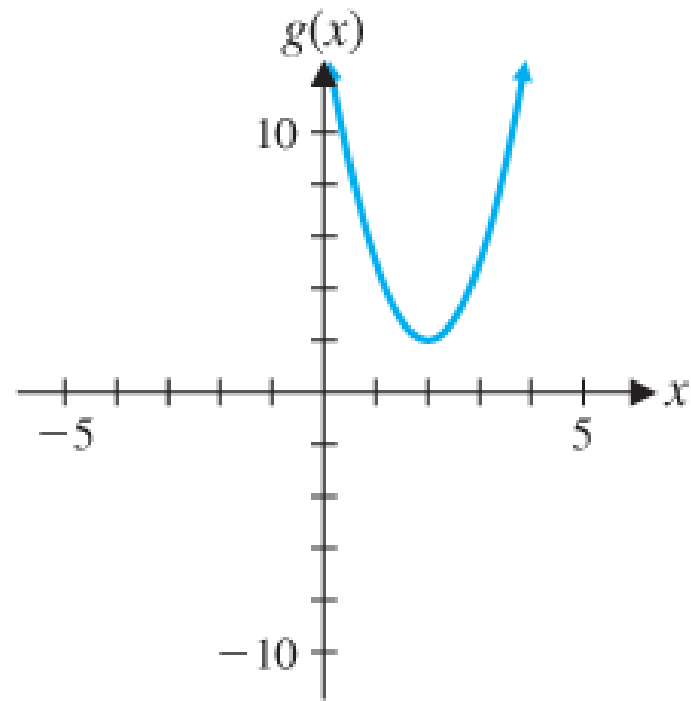
- **Karesel (ikinci dereceden) Fonksiyonlar, Denklemler ve Eşitsizlikler**



Şekil 1 İkinci dereceden fonksiyon, $h(x) = x^2$



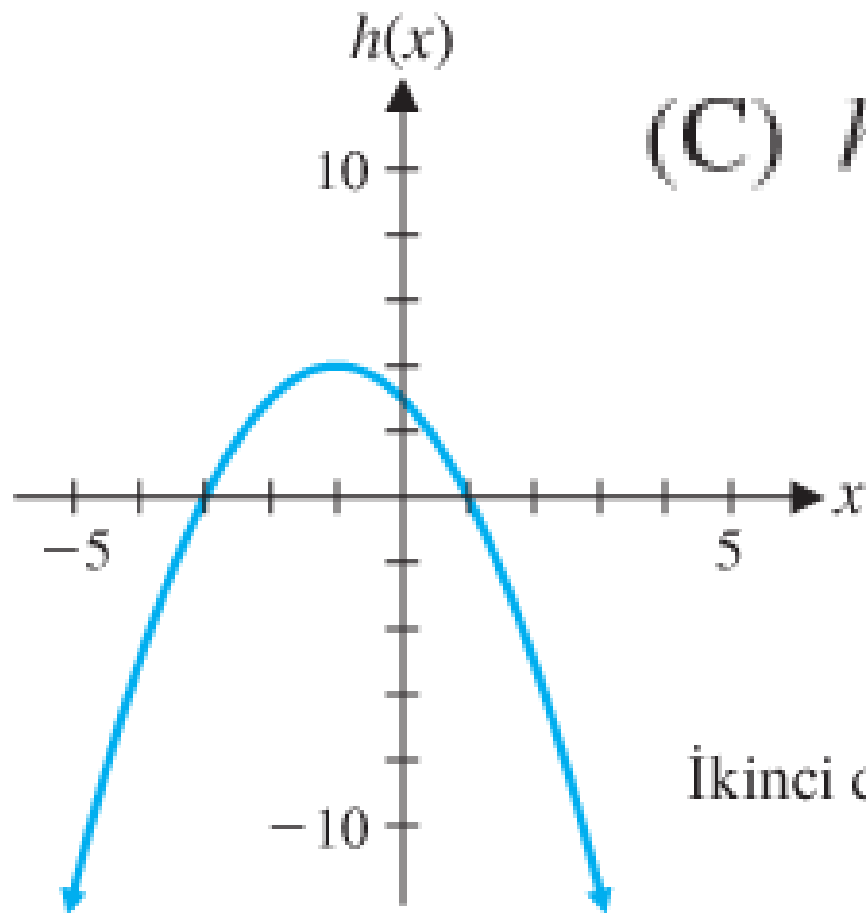
(A) $f(x) = x^2 - 4$



(B) $g(x) = 3x^2 - 12x + 14$

Şekil 2

İkinci dereceden fonksiyonların grafikleri



$$(C) \quad h(x) = 3 - 2x - x^2$$

Şekil 2

İkinci dereceden fonksiyonların grafikleri

- İkinci Dereceden Fonksiyonların ve Grafiklerinin Özellikleri

ÖRNEK 2

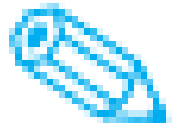
Karesel Bir Fonksiyonun İncelenmesi

f karesel fonksiyonu, $f(x) = 0.5x^2 - 6x + 21$

eşitliğiyle verilsin.

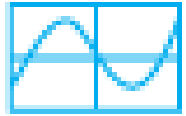
(A) f için doruk formunu bulunuz.

(B) Tepesini ve maksimum veya minimumunu bulunuz. f nin görüntü kümesini belirtiniz.

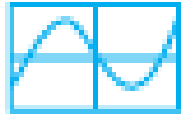


(C) f fonksiyonun grafiğinin, dönüşümler kullanılarak $g(x) = x^2$ nin grafiğinden nasıl elde edilebileceğini açıklayınız.

(D) Dik koordinat sisteminde f fonksiyonunun grafiğini kabataslak çiziniz.



(E) Uygun bir görüntü penceresi kullanarak f fonksiyonu grafiğini çiziniz.



(F) Uygun grafik çizme makinesi komutu kullanarak tepe noktasını ve maksimum veya minimumu bulunuz.