SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 1

OLASILIK TEORİSİ

1.1 Olasılıklar

1.2 Olaylar

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bölüm 1. Olasılık Teorisi

1.1 Olasılıklar

1.1.1 Giriş

- İstatistik ve olasılık teorisi, belirsizlik durumlarıyla ilgilenen bir matematik branşıdır.
- Olasılık teorisi, verilerden istatistiksel çıkarım yapmak üzere gerekli yöntemleri sağlar.

Bölüm 1. Olasılık Teorisi
1.1 Olasılıklar
1.1.2 Örneklem Uzayı(1/3)

- **Deneme** : Birden fazla sonucun mümkün olduğu süreç veya prosedür.

- **Örneklem Uzayı:** Bir denemenin S ile gösterilen örnek uzayı, olası tüm deney sonuçlarından oluşan bir kümedir.

1.1.2 Örneklem Uzayı(2/3)

Örnek: **Yazılım Hataları**

Belirli bir yazılım parçasındaki ayrı hataların sayısı, örneklem uzayına sahip olarak görülebilir.

$$S = \{0\ hata\ 1hata,\ 2hata,\ 3hata, ...\}$$

- Örnek: **Santral Problemi**

Bir yönetici, herhangi bir zamanda üç santralin çalışmasını denetlesin. Üç santralin her biri ya elektrik üretir (1) ya da üretmez (0) olarak sınıflandırılabilir.

$$S = \{(0,0,0)\ (0,0,1)\ (0,1,0)\ (0,1,1)\ (1,0,0)\ (1,0,1)\ (1,1,0)\ (1,1,1)\}$$

1.1.2 Örneklem Uzayı(3/3)

- **Şans Oyunları**
  - Şans oyunları genellikle bir paranın atılışını, bir zarın atılmasını veya bir paket oyun kartının kullanımını içerir.
- Bir zar atılışında zarın 6 farklı yüzü gelebilir ve örneklem uzayı:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Eğer iki zar atılırsa (veya hilesiz zar iki kez atılırsa), örneklem uzay Figure 1.2. de gösterildiği gibi olur.

FIGURE 1.2
Sample space for rolling two dice

S

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

1.1.3 Olasılık Değerleri(1/5)

- **Olasılıklar**

$S=\{O_1, O_2, \cdots, O_n\}$ örneklem uzayı kümesine sahip bir deneme $p_1, p_2, \cdots, p_n$ olasılıklarını içersin. Bu durumda;

$$0 \le p_1 \le 1, 0 \le p_2 \le 1, \cdots, 0 \le p_n \le 1$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Yani olasılıklar her zaman 0 ile 1 arasında değer almaktadır ve olasılıklar toplamı her zaman 1 olmalıdır.

O_i sonucunun meydana gelme olasılığı p_i ise bu durum aşağıdaki gibi yazılır:

$$P(O_i) = p_i$$

1.1.3 Olasılık Değerleri (2/5)

- Örnek: **Yazılım Hataları**

Bir yazılım ürünündeki hata (error) sayısının aşağıdaki olasılıklara sahip olduğunu varsayalım.

$$P(0 \text{ hata}) = 0.05,\ P(1 \text{ hata}) = 0.08,\ P(2 \text{ hata}) = 0.35,$$
$$P(3 hata) = 0.20,\ P(4 \text{ hata}) = 0.20,\ P(5 \text{ hata}) = 0.12,$$
$$P(i \text{ hata}) = 0, \quad \text{for } i \geq 6$$

En fazla 5 hata gelebilmektedir. Çünkü 6 ve daha fazlası için olasılık 0 dır.

Olasılığı en yüksek olan 2 hata gelmesidir.

3 ve 4 hata gelme olasılıkları ise eşittir.

1.1.3 Olasılık Değerleri (3/5)

- Bazı durumlarda, özellikle şans oyunları denemelerinde olası sonuçların tümü eşit olasılıklarla meydana geldiği düşünülebilir dolayısıyla sonuçlara aynı olasılıklar atanmalıdır.

- n sonuçlu bir örneklem uzayının eşit olasılığı => her bir olasılık değerinin 1/n olmasıdır.

1.1.3 Olasılık Değerleri (4/5)

- **Şans Oyunları**
  - Hilesiz bir zarın atılması sonucu oluşan 6 olayın olasılıkları eşittir:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

  - Şekilkde ise hileli bir zarın atılması sonucu oluşabilecek örneklem uzayını göstermektedir:

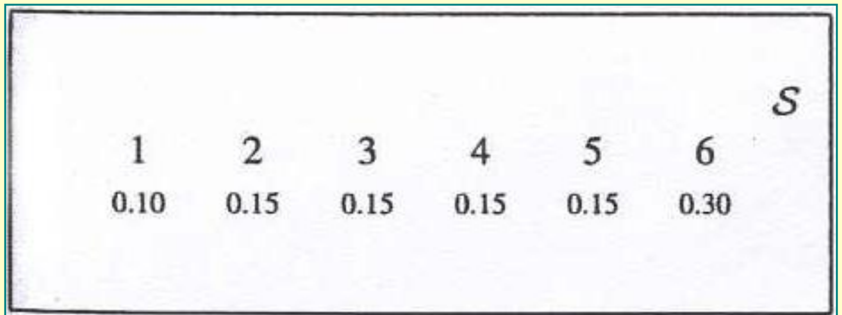


FIGURE 1.9 ●
Probability values for a biased die

Bu durumda zarın 6 gelmesi olasılığı en yüksektir.

1.1.3 Olasılık Değerleri (5/5)

– İki zar atılsın. Bu durumda sonuç sayısı 36 (=6^2) olacak ve her biri eşit olasılığa (düzgün atılan iki hilesiz zar olduğu için) sahip olacaktır ve her bir sonucun olasılık değeri 1/36 olacaktır.

S

(1, 1) 1/36	(1, 2) 1/36	(1, 3) 1/36	(1, 4) 1/36	(1, 5) 1/36	(1, 6) 1/36
(2, 1) 1/36	(2, 2) 1/36	(2, 3) 1/36	(2, 4) 1/36	(2, 5) 1/36	(2, 6) 1/36
(3, 1) 1/36	(3, 2) 1/36	(3, 3) 1/36	(3, 4) 1/36	(3, 5) 1/36	(3, 6) 1/36
(4, 1) 1/36	(4, 2) 1/36	(4, 3) 1/36	(4, 4) 1/36	(4, 5) 1/36	(4, 6) 1/36
(5, 1) 1/36	(5, 2) 1/36	(5, 3) 1/36	(5, 4) 1/36	(5, 5) 1/36	(5, 6) 1/36
(6, 1) 1/36	(6, 2) 1/36	(6, 3) 1/36	(6, 4) 1/36	(6, 5) 1/36	(6, 6) 1/36

FIGURE 1.10 ●
Probability values for rolling two dice

1.2 Olaylar
1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (1/6)

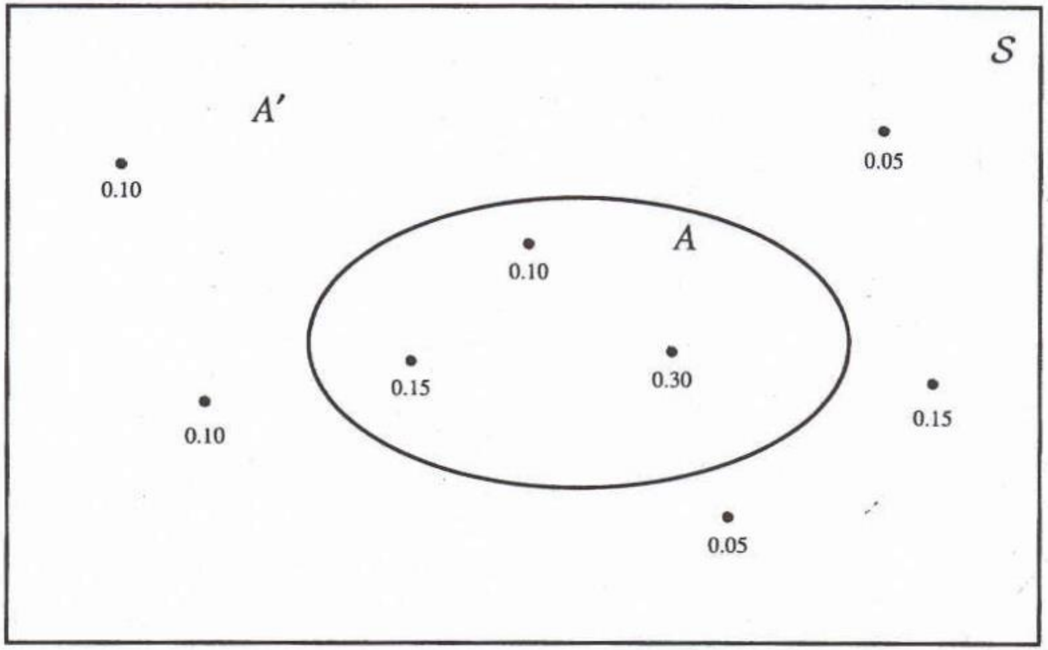
- **Olaylar**
- A olayı, S örneklem uzayının alt kümesi olsun. Özel olarak ilgilenilen sonuçların kümesini oluşturur. A olayının olasılığı olan P(A), A olayında yer alan sonuçların olasılıklarının toplanmasıyla elde edilir.
- Eğer gerçekleşen olaylar içinde yer alan sonuçlardan biri meydana geliyorsa bu durumda bir olayın meydana geldiği söylenir.

1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (2/6)

- S örneklem uzayı aşağıdaki olasılıklarla 8 farklı sonuçtan oluşsun.

FIGURE 1.14

$P(A) = 0.10 + 0.15 + 0.30 = 0.55$



$$P(A) = 0.10 + 0.15 + 0.30 = 0.55$$

$$P(A') = 0.10 + 0.05 + 0.05 + 0.15 + 0.10 = 0.45$$

Notice that $P(A) + P(A') = 1.$

1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (3/6)

- **Olayların Tümleyenleri**

  A' olayı A olayının tümleyeni olarak gösterilir. A' olayı S örneklem uzayındaki her şeyi içeren fakat A olayını içermeyen olaylardan oluşur.

$$P(A)+P(A')=1$$

- Tek sonuçtan oluşan olaylar bazen temel olaylar veya basit olaylar olarak adlandırılır.

1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (4/6)

- Örnek: **Yazılım Hataları**

  Yazılım ürünlerinde 2 den fazla hata olmayan A olayı düşünün:

$$A = \{\, 0 \text{ hata},\ 1 \text{ hata},\ 2 \text{ hata} \,\} \subset S$$

ve

$$P(A) = P(0 \text{ hata}) + P(1 \text{ hata}) + P(2 \text{ hata})$$

$$= 0.05 + 0.08 + 0.35 = 0.48$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (5/6)

- **Şans Oyunları**
  - çift = { zar atıldığında çift sayı gelmesi }
    = { 2,4,6 }

    Hilesiz zar için $$P(çift) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
  - A = { iki zar atıldığında toplamlarının 6 gelmesi}
    = { (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) }

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Hilesiz iki zar atıldığında toplamlarının 6 gelmesi, 36 sonuçtan 5 inde mümkündür. Yani yaklaşık %14 olasılıkla zarların toplamı 6 gelmektedir.

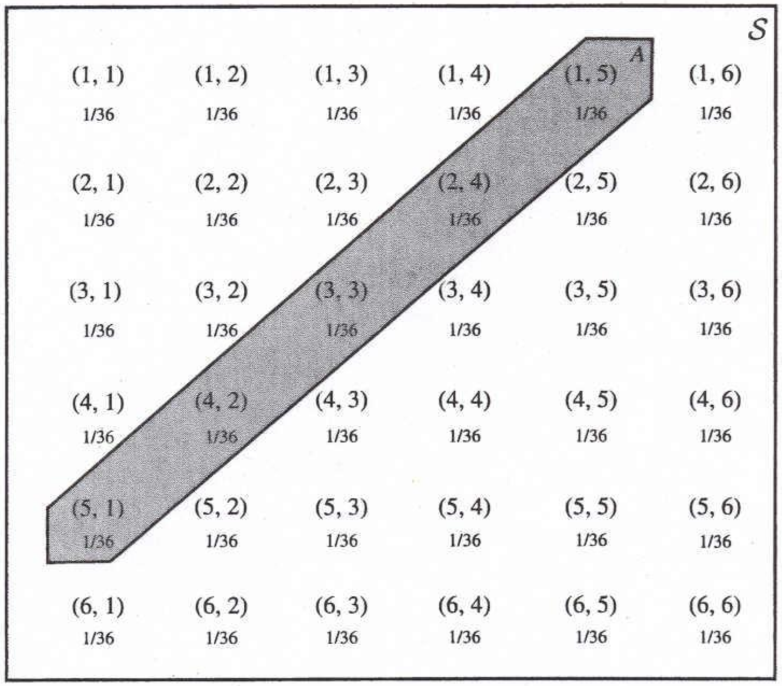


FIGURE 1.18 ●
Event A: sum equal to 6

1.2.1 Olaylar ve Tümleyenleri (6/6)

- B = { iki zar atıldığında en az 6 gelmesi}

FIGURE 1.19 ●
Event B: at least one 6 recorded

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(B') = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$