SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 1

OLASILIK TEORİSİ

1.5 Kesişen Olayların Olasılıkları

1.6 Bayes Teoremi

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

1.5 Olay Kesişimlerinin Olasılıkları

1.5.1 Genel Çarpım Kuralı

$$\bullet P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

$$\bullet P(C|A\cap B)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)P(C|A\cap B))=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$

- **Kesişim Olaylarının Olasılıkları**

$A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarının kesişimlerinin olasılıkları:

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

1.5.2 Bağımsız Olaylar

$$P(B|A)=P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

$$ve\;\; P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

- **Bağımsız Olaylar**

  Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa A ve B olayları bağımsız olaylardır:

$$P(A|B)=P(A), P(B|A)=P(B),\;\; P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

  Bu koşullardan herhangi biri diğer ikisini de gerektirir.

- Bağımsızlığın yorumu: Bir olayın meydana gelme olasılığı diğer olayı etkilememektedir.

- **Bağımsız Olayların Kesişimi**

$A_1, A_2, ..., A_n$ bağımsız olayların kesişimi :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

1.5.3 Örnekler ve Olasılık Ağaçları (1/3)

- Örnek: **Araba Garantileri**

Bir şirket, dört olası yerden birinde monte ettirdiği belirli bir otomobil türünü satıyor. Tesis I % 20; tesis II,% 24; tesis III,% 25 ve tesis IV % 31. Araba satın alan bir müşteri, aracın nerede monte edildiğini bilmez. Bu nedenle satın alınan bir aracın dört tesisin her birinden olan olasılıkları, 0.20, 0.24, 0.25 ve 0.31 olarak düşünülebilir.

Satılan her yeni araba, 1 yıllık tampon–tampona garantisine sahiptir.

$P(\text{ talep} \mid \text{tesis I }) = 0.05,\quad P(\text{ talep} \mid \text{tesis II }) = 0.11$

$P(\text{ talep} \mid \text{tesis III }) = 0.03,\quad P(\text{ talep} \mid \text{tesis IV }) = 0.08$

Örneğin, tesis I'e monte edilen bir araba, garantisine ilişkin bir talep almak için 0.05 olasılığına sahiptir.

Taleplerin bu dört koşullu olasılıklar eşit olmadığı için, montaj yerinden açıkça bağımsız olmadığına dikkat edin.

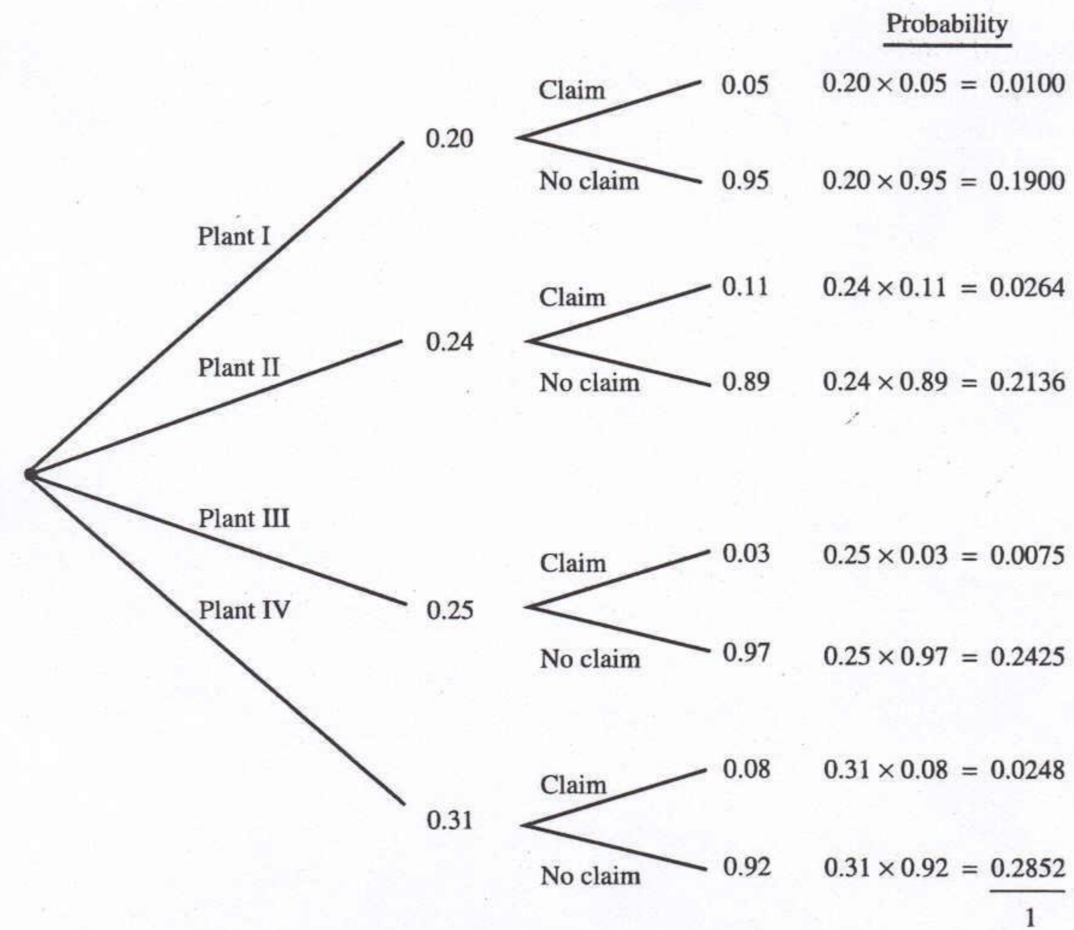
1.5.3 Örnekler ve Olasılık Ağaçları (2/3)

P(talep) = P(tesis I, talep) + P(tesis II, talep)

+ P(tesis III, talep) + P(tesis IV, talep)

= 0.0687

FIGURE 1.65 ●
Probability tree for car warranties example



1.5.3 Örnekler ve Olasılık Ağaçları (3/3)

- **Şans Oyunları**
  - Hilesiz bir zar atılıyor

    çift = { 2,4,6 }   ve yüksek skor = { 4,5,6 }

    Sezgisel olarak, bu iki olay bağımsız değildir.

    $P(çift) = \frac{1}{2}$ and $P(çift \mid yüksekskor) = \frac{2}{3}$
  - Kırmızı ve mavi zar atılıyor.

    A = { kırmızı zarın çift gelmesi}

    B = { mavi zarın çift gelmesi}

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1.6 Bayes Teoremi
1.6.1 Toplam Olasılık Yasası (1/3)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

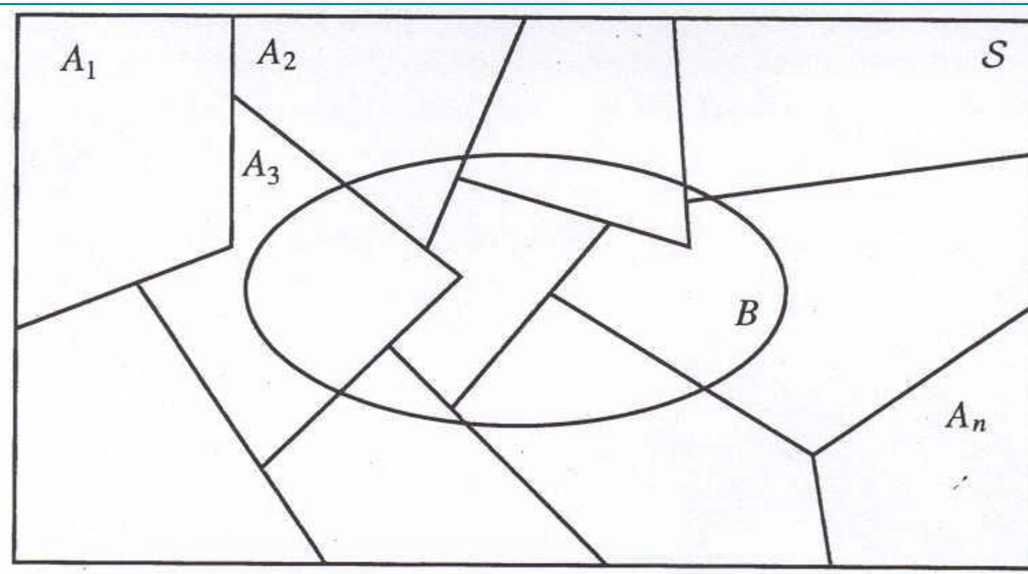
$$S = A_1 \cup \cdots \cup A_n \ \ ve \ \ A_i \text{ : ayrık olaylar}$$

$$\Rightarrow B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \text{ ve } (A_i \cap B) \text{ : ayrık olaylar}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1)P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

FIGURE 1.67 ●
A partition $A_1, \ldots, A_n$ and an event B



1.6.1 Toplam Olasılık Yasası (2/3)

- **Toplam Olasılık Yasası**
- Eğer $A_1, A_2, ..., A_n$ örneklem uzayının bölümleriyse B olayının olasılığı $P(A_i)$ ve $P(B | A_i)$ olasılıkları kullanılarak:

$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + \cdots + P(A_n)P(B | A_n)$$

1.6.1 Toplam Olasılık Yasası (3/3)

- Örnek: **Araba Garantileri**

Eğer A_1 , A_2, A_3 ve A_4 sırasıyla, bir aracın I, II, III ve IV tesislerinde monte edildiği olaylarsa, o zaman örneklem uzayının bir bölümünü oluştururlar ve $P(A_i)$ olasılıkları dört tesisin oranlarından oluşur.

B = { talebin gerçekleşmesi}

= dört ayrı tesis için talep oranları

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) + P(A_4)P(B \mid A_4) \\
&= (0.20 \times 0.05) + (0.24 \times 0.11) + (0.25 \times 0.03) + (0.31 \times 0.08) \\
&= 0.0687
\end{aligned}
$$

1.6.2 Sonsal Olasılıkların Hesaplanması

- $P(A_i)$ ve $P(B \mid A_i) \Rightarrow P(A_i \mid B) = ?$
- $P(A_1), \cdots, P(A_n)$: önsel olasılıklar
- $P(A_1 \mid B), \cdots, P(A_n \mid B)$: sonsal olasılıklar

$$\Rightarrow P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

- **Bayes Teoremi**

Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ örneklem uzayının bölümleri B olayının olması koşuluyla olayının sonsal olasılığı, $P(A_i)$ ve $P(B \mid A_i)$ olasılıkları kullanılarak:

A_i

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

1.6.3 Sonsal Olasılık Örnekleri(1/2)

- Örnek: **Araba Garantileri**
  - Önceki olasılıklar

$$P(tesis\ I) = 0.20, \quad P(tesis\ II) = 0.24$$

$$P(tesis\ III) = 0.25, \quad P(tesis\ IV) = 0.31$$

  - Aracın garantisinde bir talep varsa bu olasılıkları nasıl değiştirir?

$$P(tesis\ I \mid talep) = \frac{P(tesis\ I)P(talep \mid tesis\ I)}{P(talep)} = \frac{0.20 \times 0.05}{0.0687} = 0.146$$

$$P(tesis\ II \mid talep) = \frac{P(tesis\ II)P(talep \mid tesis\ II)}{P(talep)} = \frac{0.24 \times 0.11}{0.0687} = 0.384$$

$$P(tesis\ III \mid talep) = \frac{P(tesis\ III)P(talep \mid tesis\ III)}{P(talep)} = \frac{0.25 \times 0.03}{0.0687} = 0.109$$

$$P(tesis\ IV \mid talep) = \frac{P(tesis\ IV)P(talep \mid tesis\ IV)}{P(talep)} = \frac{0.31 \times 0.08}{0.0687} = 0.361$$

1.6.3 Sonsal Olasılık Örnekleri(2/2)

– Garanti üzerinde herhangi bir talep bulunulmazsa:

$$P(tesis\ I\,|\,talepyok) = \frac{P(tesis\ I)P(talepyok\,|\,tesis\ I)}{P(talepyok)}$$

$$= \frac{0.20 \times 0.95}{0.9313} = 0.204$$

$$P(tesis\ II\,|\,talepyok) = \frac{P(tesis\ II)P(talepyok\,|\,tesis\ II)}{P(talepyok)}$$

$$= \frac{0.24 \times 0.89}{0.9313} = 0.229$$

$$P(tesis\ III\,|\,talepyok) = \frac{P(tesis\ III)P(talepyok\,|\,tesis\ III)}{P(talepyok)}$$

$$= \frac{0.25 \times 0.97}{0.9313} = 0.261$$

$$P(tesis\ IV\,|\,talepyok) = \frac{P(tesis\ IV)P(talepyok\,|\,tesis\ IV)}{P(talepyok)}$$

$$= \frac{0.31 \times 0.92}{0.9313} = 0.306$$