SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 2
RASGELE DEĞİŞKENLER
2.3 Rasgele Değişkeninin Beklenen Değeri
2.4 Rasgele Değişkeninin Varyansı

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

2.3 Rasgele Değişkenlerin Beklenen Değeri

2.3.1 Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri (1/2)

- Kesikli rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$E(X) = \sum_i p_i x_i$$

- Olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) olan sürekli rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{\text{state space}} x f(x) dx$$

- Rasgele değişkeninin beklenen değeri aynı zamanda rasgele değişkeninin ortalaması olarak da adlandırılır.

2.3.1 Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri (2/2)

- Örnek
  - Tamirat maliyetinin beklenen değeri

$$E(\text{cost}) = (\$50 \times 0.3) + (\$200 \times 0.2) + (\$350 \times 0.5) = \$230$$

2.3.2 Sürekli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri (1/2)

- Örnek
  - Metal silindirin çapının beklenen değeri

$$E(X)=\int_{49.5}^{50.5} x(1.5-6(x-50.0)^2)dx$$

  - Değişken değiştirildiğinde: y=x−50

$$E(x)=\int_{-0.5}^{0.5}(y+50)(1.5-6y^2)dy$$

$$=\int_{-0.5}^{0.5}(-6y^3-300y^2+1.5y+75)dy$$

$$=[-3y^4/2-100y^3+0.75y^2+75y]_{-0.5}^{0.5}$$

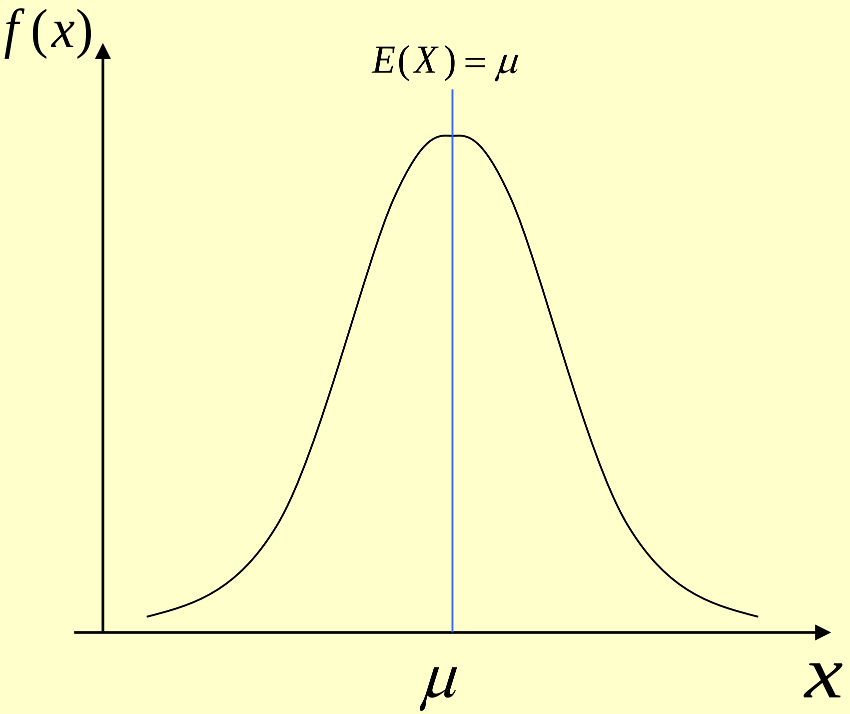
$$=[25.09375]-[-24.90625]=50.0$$

2.3.2 Sürekli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri (2/2)

- Simetrik Rasgele Değişkeni
  - f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X r.d μ noktasında simetrikse

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

  - O zaman $E(X) = \mu$
  - Böylece rasgele değişkeninin beklenen değeri simetri noktasına eşittir.



$$E(X) = \int xf(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} xf(x)dx + \int_{\mu}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\Downarrow y = 2\mu - x$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} xf(x)dx + \mu - \int_{-\infty}^{\mu} yf(y)dy$$

$$= \mu$$

2.3.3 Rasgele Değişkenlerin Medyanı (1/2)

- Medyan
  - Rasgele değişkeninin《orta》değerini verir

$$F(x) = 0.5$$

- Simetrik Rasgele Değişkeni
  - Sürekli rasgele değişken, μ noktası etrafında simetrik ise, o zaman hem medyan hem de rasgele değişkeninin beklenene değeri μ ye eşittir.

2.3.3 Rasgele Değişkenlerin Medyanı (2/2)

- Örnek

$$F(x) = 1.5x - 2(x - 50.0)^3 - 74.5 = 0.5$$

$$x = 50.0$$

2.4 Rasgele Değişkenlerin Varyansı
2.4.1 Varyans Yorumu ve Tanımı (1/2)

- Varyans (σ^2)
  - Rasgele değişkenin ortalama değerine göre dağılımının yayılmasını ölçen pozitif bir miktar
  - Varyansın büyük değer olması, dağılımın daha fazla olduğunu göstermektedir.
  - Tanım:

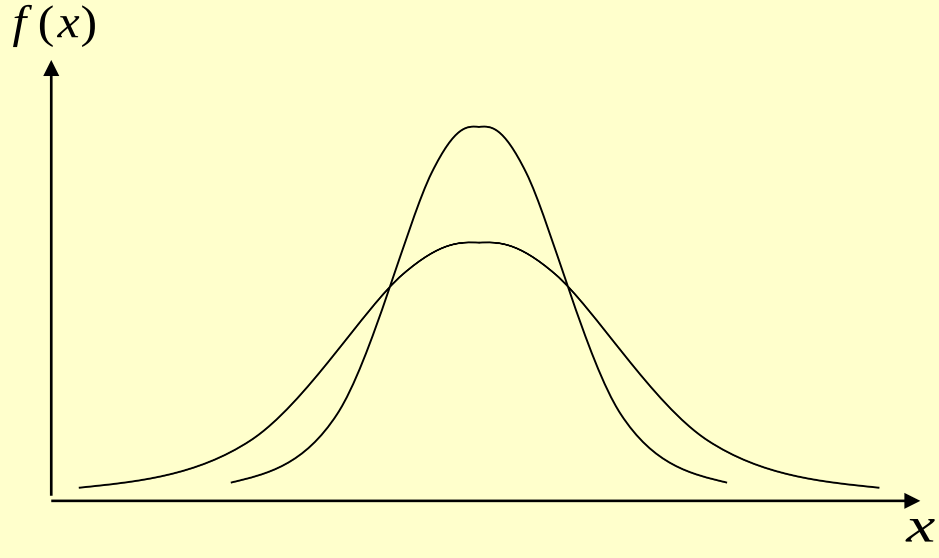
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

- Standart Sapma:
  - Varyansın pozitif karekökü
  - Gösterimi: σ

2.4.1 Varyans Yorumu ve Tanımı (2/2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E((X-E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

İki dağılım aynı ortalamaya sahip fakat varyansları farklı



2.4.2 Varyans Hesaplama Örnekleri (1/1)

- Örnek

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$$

$$= 0.3(50 - 230)^2 + 0.2(200 - 230)^2 + 0.5(350 - 230)^2$$

$$= 17{,}100 = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{17{,}100} = 130.77$$

2.4.3 Chebyshev Eşitsizliği (1/1)

- Chebyshev Eşitsizliği
  - μ ortalama σ^2 varyansına sahip bir raslantı değişkeni

$$P(\mu - c\sigma \le X \le \mu + c\sigma) \ge 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\text{for} \quad c \ge 1$$

  - Örneğin $c = 2$ değerini alsın

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$$

- İspat

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \geq \int_{|x-\mu|>c\sigma} (x-\mu)^2 f(x)dx \geq c^2\sigma^2 \int_{|x-\mu|>c\sigma} f(x)dx.$$

$$\Rightarrow P(|x-\mu| > c\sigma) \leq 1/c^2$$

$$\Rightarrow P(|x-\mu| \leq c\sigma) = 1 - P(|x-\mu| > c\sigma) \geq 1 - 1/c^2$$

2.4.4 Rasgele Değişkenlerin Çeyrekleri (1/2)

- Rasgele Değişkenlerin Çeyrekleri
  - X rasgele değişkeninin p. çeyreği:

$$F(x) = p$$

  - Rasgele değişkenin p. çeyreğinden daha düşük bir değer alması olasılığı p
    - Üst çeyrek

      Dağılımın 75. yüzdesi
    - Alt çeyrek

      Dağılımın 25. yüzdesi
    - Çeyrekler arası açıklık

      İki çeyrek arasındaki mesafe

2.4.4 Rasgele Değişkenlerin Çeyrekleri (2/2)

- Örnek

$$F(x) = 1.5x - 2(x - 50.0)^3 - 74.5 \text{ for } 49.5 \le x \le 50.5$$

  - Üst çeyrek: $F(x) = 0.75 \quad x = 50.17$
  - Alt çeyrek: $F(x) = 0.25 \quad x = 49.83$
  - Çeyrekler arası açıklık: $50.17 - 49.83 = 0.34$