SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 3

KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

3.1 Binom Dağılımı

3.2 Geometrik ve Negatif Binom Dağılımı

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

3.1 Binom Dağılımı

3.1.1 Bernoulli Rasgele Değişkenleri (1/2)

Model; sadece iki olası sonucu olan herhangi bir süreci içerir. Örneğin;

– para atma sonucu yazı mı tura mı geleceği,

– bir vana açık mı yoksa kapalı mı

–bir maddenin kusurlu mu kusursuz mu gibi süreçler Bernouilli dağılımıdır.

Sonuçlar 0 ya da 1 ile etiketlenir.

Rasgele değişken, 1 sonucunun ortaya çıkma olasılığını p, $0 \leq p \leq 1$ parametresi ile tanımlar.

3.1.1 Bernoulli Rasgele Değişkenleri (2/2)

- Beklenen Değer ve Varyans;

$$
\begin{aligned}
E(X) &= (0 \times P(X=0)) + (1 \times P(X=1)) \\
&= (0 \times (1-p)) + (1 \times p) \\
&= p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= (0^2 \times P(X=0)) + (1^2 \times P(X=1)) \\
&= p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}
$$

3.1.2 Binom Dağılımının Tanımı (1/5)

- Bir denemenin aşağıdakileri içerdiğini düşünün:
  - n Bernoulli denemesi (X_1, ..., X_n)
  - Denemeler birbirinden bağımsız
  - Her birinin başarı olasılığı sabit p değerine sahip.

- O halde toplam başarı sayısı, yani $X=X_1+\ldots+X_n$, rasgele değişkeni parametresi n ve p olan Binom dağılımına sahiptir ve $X\sim B(n,p)$ ile gösterilmektedir.

3.1.2 Binom Dağılımının Tanımı (2/5)

- B(n,p) rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=p+\cdots+p=np$$

$$Var(X)=Var(X_1)+\cdots+Var(X_n)$$

$$=p(1-p)+\cdots+p(1-p)=np(1-p)$$

3.1.2 Binom Dağılımının Tanımı (3/5)

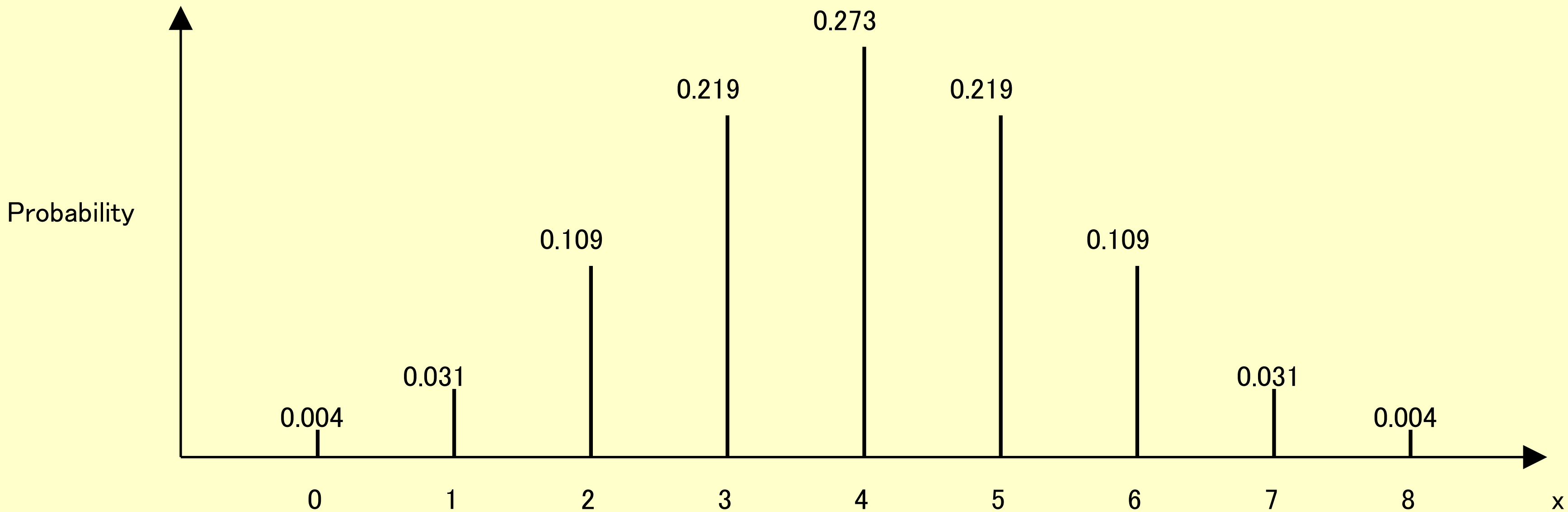
- Örnek: X~B(8,0.5)

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\times 0.5^3\times(1-0.5)^5=\frac{8!}{3!5!}\times 0.5^8=0.219$$

$$\begin{aligned}P\left(X\le 1\right)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=\binom{8}{0}\times 0.5^0\times(1-0.5)^8+\binom{8}{1}\times 0.5^1\times(1-0.5)^7\\&=\frac{8!}{0!8!}\times 0.5^8+\frac{8!}{1!7!}\times 0.5^8=0.004+0.031=0.035\end{aligned}$$

3.1.2 Binom Dağılımının Tanımı (4/5)

- Örnek X˜B(8,0.5)



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X \leq x)$	0.004	0.035	0.144	0.363	0.636	0.855	0.965	0.996	0.1000

3.1.1 Binom Dağılımının Tanımı (5/5)

- Simetrik Binom Dağılımı:

  B(n,0.5) dağılımı n parametresinin herhangi bir değeri için simetrik olasılık dağılımıdır. Bu durumda beklenen değeri n/2 olmaktadır.

Örnek: Hava Kuvvetleri Kalkışı (1/3)

- 16 uçak

- Belli bir uçağın kalkışı sırasında motorunun çalışmaması olasılığı 0.25

- O halde, başarıyla çalıştırılan uçak sayısı n = 16 ve p = 0.75 parametleriyle Binom dağılıma sahiptir.

- Kalkışı başarıyla yapması beklenen uçak sayısı

$$E\left(X\right)=np=16\times 0.75=12$$

Örnek : Hava Kuvvetleri Kalkışı (2/3)

- Varyans

$$Var\left(X\right) = np(1-p) = 16\times 0.75\times 0.25 = 3$$

- 12 uçağın başarıyla kalkma olasılığı;

$$P\left(X = 12\right) = \binom{16}{12}\times 0.75^{12}\times 0.25^{4} = \frac{16!}{12!4!}\times 0.75^{12}\times 0.25^{4} = 0.225$$

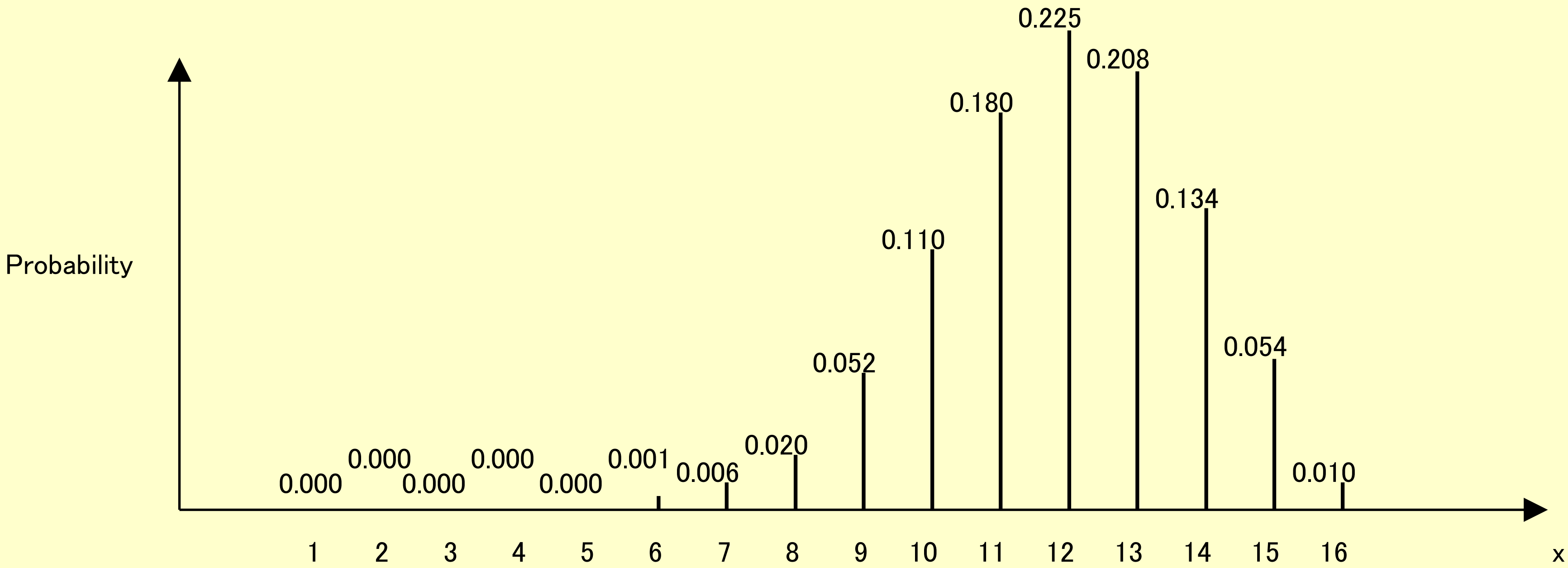
- En az 14 uçağın başarıyla kalkma olasılığı;

$$P\left(X \geq 14\right) = P\left(X = 14\right) + P\left(X = 15\right) + P(X = 16)$$

$$= \binom{16}{14}\times 0.75^{14}\times 0.25^{2} + \binom{16}{15}\times 0.75^{15}\times 0.25^{1} + \binom{16}{16}\times 0.75^{16}\times 0.25^{0}$$

$$= 0.134 + 0.054 + 0.010 = 0.198$$

Örnek: Hava Kuvvetleri Kalkışı (3/3)



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$P(X \le x)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.027	0.079	0.189	0.369	0.594	0.802	0.936	0.990	0.100

Bernoulli Denemelerinde Başarı Oranı

$$X \sim B(n, p)$$

- Eğer, $$Y = X / n$$

$\longrightarrow$

$$E(Y) = p$$

$$V(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$$

3.2 Geometrik ve Negatif Binom Dağılımı
3.2.1 Geometrik Dağılımın Tanımı (1/2)

- Bağımsız bir Bernoulli denemesi dizisinde ilk başarıya kadar olan ve dahil edilen denemelerin sayısı, sabit bir başarı olasılığı p parametresi ile geometrik dağılıma sahiptir.

- Olasılık fonksiyonu;

$$P\left(X = x\right) = (1-p)^{x-1}\,p \qquad x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots.$$

3.2.1 Geometrik Dağılımın Tanımı (2/2)

- Dağılım fonksiyonu;

$$P\left(X \le x\right) = 1-(1-p)^{x}$$

- Beklenen değer ve varyans;

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p}$$

$$Var\left(X\right) = \frac{1-p}{p^{2}}$$

- X in beklenen değeri:

$$E[X]=\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}p=p\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$$

- X in varyansı:

$$Var(X)=E[X^2]-E^2[X]$$

$$E[X^2]=\sum_{x=1}^{\infty}x^2(1-p)^{x-1}p=p\sum_{x=1}^{\infty}x^2(1-p)^{x-1}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}x^2(1-p)^{x-1}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+\frac{2(1-p)}{p^2}\right)=\frac{2-p}{p^3}$$

$$\Rightarrow Var(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

Örnek : Hava Kuvvetleri Kalkışı (1/2)

- Eğer ekip, motorların çalıştırılmasında başarısız olursa, tekrar denemeden önce 5 dakika beklemeleri gerekmektedir,

- Bir uçağın motorunu çalıştırmak için gereken deneme sayısı dağılımı → p = 0.75 parametresiyle geometrik dağılımdır.

- Motorların üçüncü denemede çalışma olasılığı;

$$P(X = 3) = 0.25^2 \times 0.75 = 0.047$$

Örnek : Hava Kuvvetleri Kalkışı (2/2)

- Motorları çalıştırmak için 10 dakika içinde ilk denemede uçağın kaldırılma olasılığı,

- Motorları çalıştırmak için beklenen deneme sayısı,

$$P\left(X \leq 3\right) = 1 - 0.25^3 = 0.984$$

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.75} = 1.33$$

3.2.2 Negatif Binom Dağılımının Tanımı (1/2)

- Bağımsız bir Bernoulli denemesi dizisinde r. başarıya kadar olan ve dahil edilen denemelerin sayısı, sabit bir başarı olasılığı p parametresi ve r parametresi ile negatif binom dağılıma sahiptir.

- Olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r} p^{r} \qquad x = r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots.$$

3.2.2 Negatif Binom Dağılımının Tanımı (2/2)

- Beklenen değer ve varyans

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Örnek : Personel Alımı (1/2)

- Bir şirketin üç yeni işçiyi işe almak istediğini ve görüşme yapılan her başvuru sahibinin, kabul edilebilir bulunma olasılığı 0.6 olduğunu varsayalım.
- Şirketin görüşme yapmak istediği toplam başvuru sayısının dağılımı → p =0.6 and r = 3 parametreleri ile negatif binom dağılımı gösterir.

- Altı kişi ile görüşülmesi olasılığı:

$$P(X=6)=\binom{5}{2}\times 0.4^{3}\times 0.6^{3}=0.138$$

Örnek : Personel Alımı (2/2)

- Şirkete altı başvuru sahibinin görüşülmesine izin veren bir bütçesi varsa, bütçenin yeterli olması olasılığı;

$$P(X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$
$$= 0.216 + 0.259 + 0.207 + 0.318 = 0.820$$

- Beklenen gerekli mülakat sayısı;

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.6} = 5$$