SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 4
SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI
4.1 Düzgün Dağılım
4.2 Üstel Dağılım

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

4.1 Düzgün Dağılım

4.1.1 Düzgün Dağılımın Tanımı

- –Eğer $X \sim U(a,b)$, ise X a ve b aralığında değerler alır.

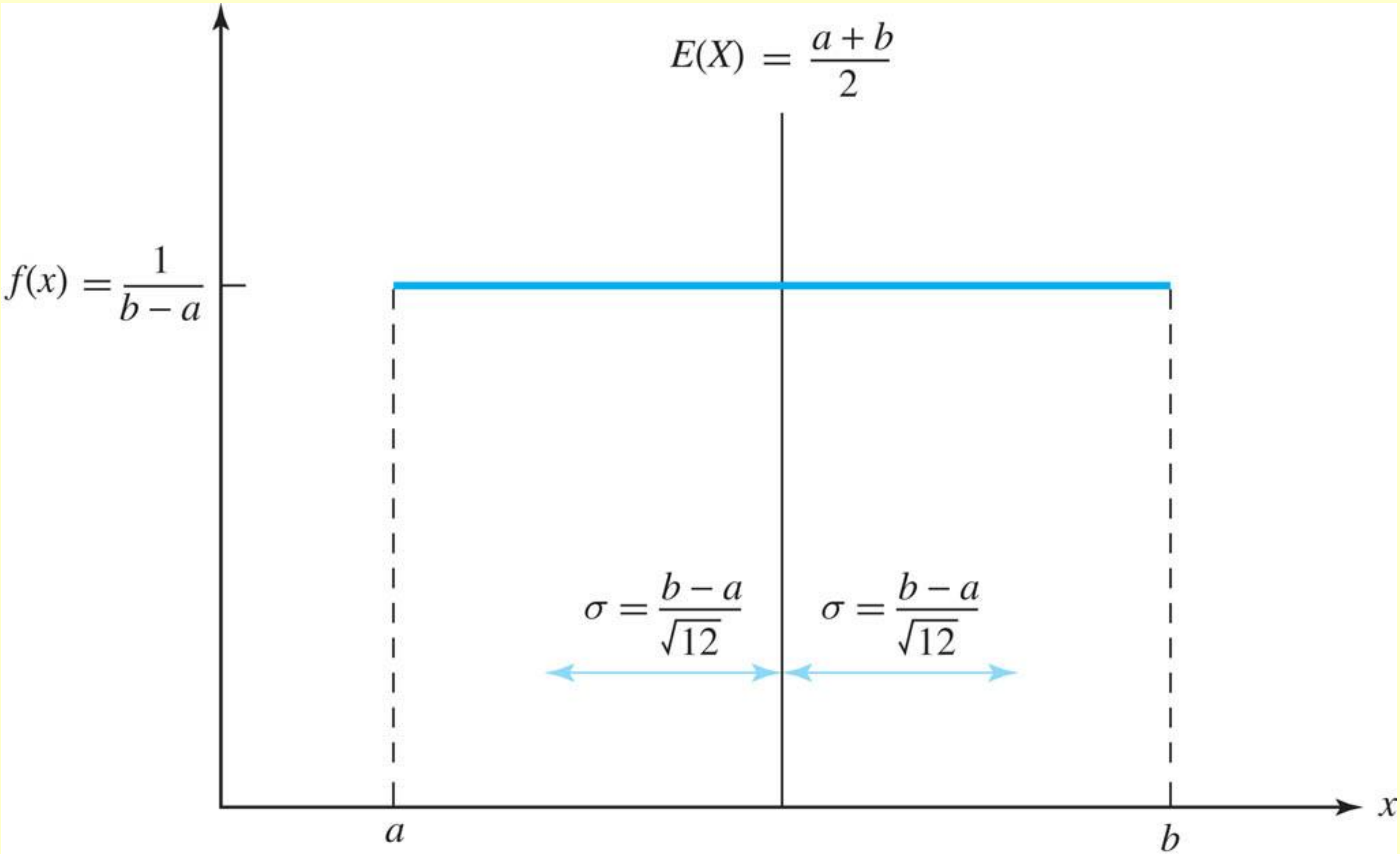
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad for \quad a \le x \le b$$

–Ortalama ve varyans,

$$P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}, \qquad \text{for} \ a \le c < d \le b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



U(a, b) dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

4.2 Üstel Dağılım
4.2.1 Üstel Dağılımın Tanımı

- Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \mathit{for} \quad x \geq 0$$

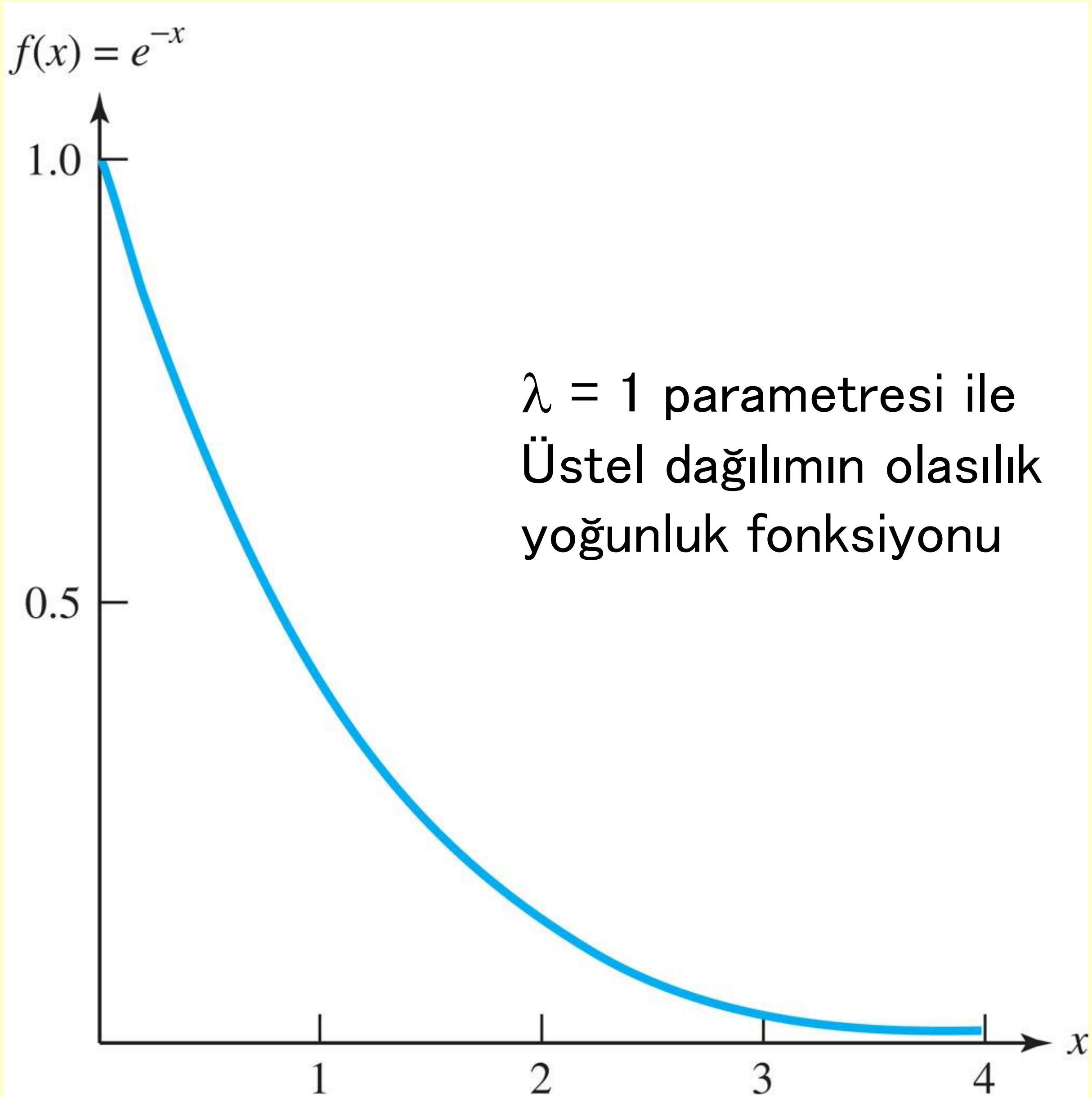
- Dağılım fonksiyonu:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \mathit{for} \quad x \geq 0$$

$$0, \qquad \text{otherwise}$$

- Ortalama ve varyans:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \mathit{and} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



$\lambda = 1$ parametresi ile
Üstel dağılımın olasılık
yoğunluk fonksiyonu

- Üstel dağılım, çoğu kez, belirli bir olayın ortaya çıkmasına kadar geçen süre olarak ortaya çıkar.

Örneğin,

Deprem olana kadar geçen süre,

Yeni bir savaş çıkana kadar geçen süre vs

4.2.2 Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

- Herhangi bir negatif olmayan x ve y için

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y)$$

- Üstel dağılımı, hafızasızlık özelliği olan tek sürekli dağılımdır.

- Üstel rasgele değişkenin hafızasızlık özelliği :

$$P\{X \geq x+y \mid X \geq x\} = P\{X \geq y\}$$

Bu eşdeğerdir:

$$P\{X \geq x+y, X \geq x\} = P\{X \geq x+y\} = P\{X \geq x\}P\{X \geq y\}$$

X bir üstel rastgele değişken olduğunda,

$$P\{X \geq x\} = e^{-\lambda x}$$

Hafızasızlık durumu uyumludur çünkü,

$$e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}$$

- Örnek: Bir aracın aküsü tükeninceye kadar alınan yol uzunluğu, ortalaması 10.000 mil olan üstel dağılıma sahip olduğunu varsayalım. Bir kişi 5000 mil yolculuk yapmak istiyorsa, aküsünü değiştirmeden yolculuğunu tamamlayabilme olasılığı nedir?

- X bataryanın kalan ömrünü (bin mil olarak) içeren rasgele bir değişken olsun. O zaman,

$$E[X] = 1/\lambda = 10 \quad \Rightarrow \lambda = 1/10$$

$$P\{X > 5\} = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0.604$$

X, üstel rasgele değişken değilse ne olur?

$$P\{X > t+5 \mid X > t\} = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}$$

Yani, t hakkında ek bir bilgi bilinmelidir

- Önerme: Eğer $X_1, X_2, \cdots, X_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ parametreleriyle bağımsız üstel dağılıyorsa o zaman $\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ile üstel dağılır.

Kanıt:

$$P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = P\{X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i x)$$

$$= \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x)$$

- Örnek: Bir seri sistemin çalışabilmesi için tüm bileşenlerinin işlev görmesi gerekir. Bileşen ömürlerinin n–bileşen serisi sistemi için, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ parametreler ile bağımsız üstel rasgele değişkenlerdir. Sistemin en az t zamanına kadar çalışabilme olasılığı nedir?

X, sistemin ömrünü gösteren bir rasgele değişken olsun.

O zaman X, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ parametresiyle üstel dağılıma sahip olur.

Bu yüzden,

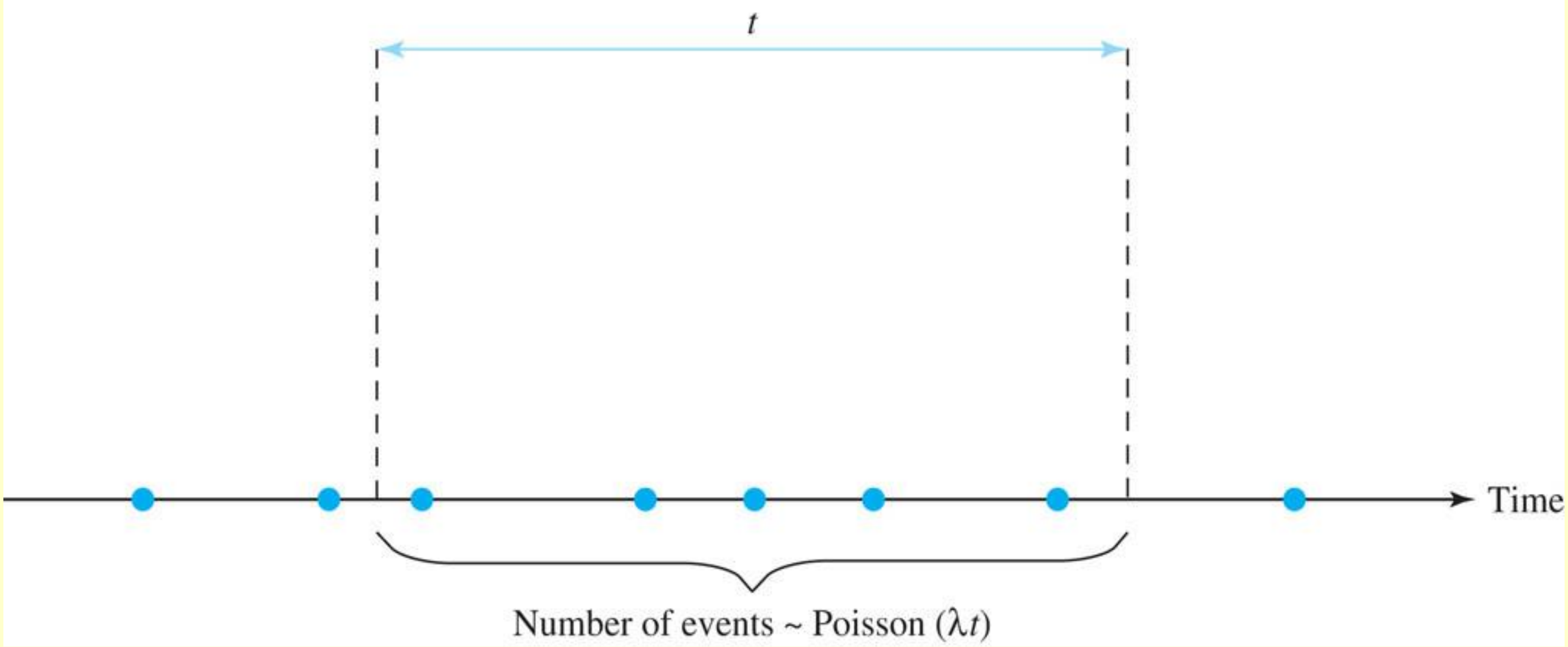
$$P\{X > t\} = \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t)$$

4.2.3 Poisson Süreci

- Stokastik bir süreç rasgele olaylar dizisidir.

- λ parametreli bir Poisson süreci, olay–oluşumları arasındaki zaman (veya uzay) aralıklarının λ parametresi ile Üstel dağılımı izlediği bir stokastik süreçtir.
- X, sabit bir sürede t zaman aralığında meydana gelen olayların sayısıysa, o zaman

$$X \sim P(\lambda t)$$



Poisson süreci. t uzunluğunda bir zaman aralığında meydana gelen olayların sayısı, ortalama λt ile Poisson dağılımına sahiptir.

- Poisson Süreci

Suppose that events are occurring at random time points and let N(t) denote the number of points that occur in time interval [0,t].

Then, A Poisson process having rate $\lambda(>0)$ is defined if

(a) N(0)=0,

(b) the number of events that occur in disjoint time intervals are independent,

(c) the distribution of N(t) depends only on the length of interval,

(d)

$$\lim_{h\to\infty}\frac{P\{N(h)=1\}}{h}=\lambda,$$ and

(e)

$$\lim_{h\to\infty}\frac{P\{N(h)\geq 2\}}{h}=0.$$