SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 4

SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

4.3 Gamma Dağılımı

4.4 Weibull Dağılımı

4.5 Beta Dağılımı

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

4.3 Gamma Dağılımı
4.3.1 Gamma Dağılımının Tanımı

- Güvenilirlik teorisi ve yaşam testi için kullanışlıdır.

- Gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx \quad for \quad k>0$$

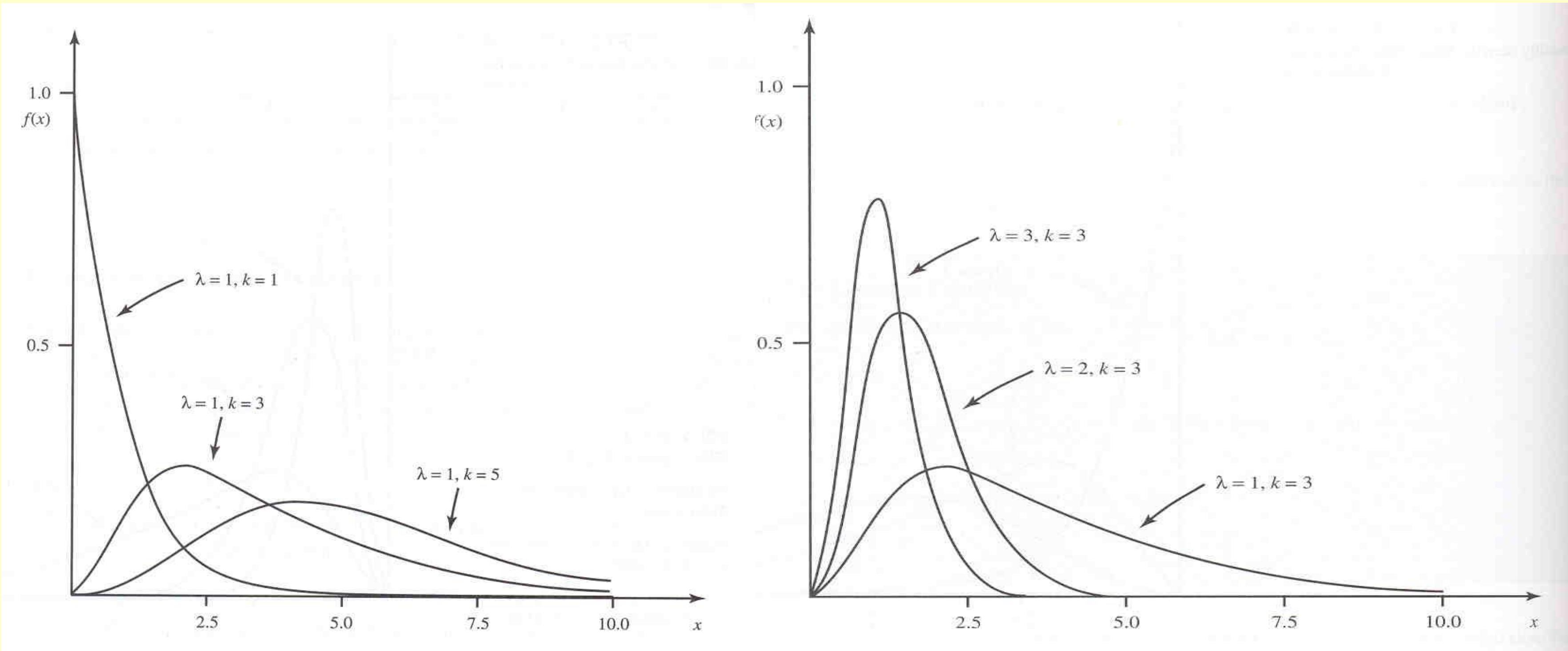
- **k**>0 ve λ >0 için Gamma olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \quad \text{for} \quad x\geq 0$$

- Ortalama ve varyans:

$$E(X)=k/\lambda \quad and \quad V(X)=k/\lambda^2$$

Gamma Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Eğrileri



$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \quad \text{for} \quad x \geq 0$$

- Gamma fonksiyonu hesaplaması;

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}dx=\int_0^\infty e^{-y}y^{k-1}dy \backslash\backslash(by \backslash letting \backslash y=\lambda x).$$

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-y}y^{k-1}dy=-e^{-y}y^{k-1}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-y}(k-1)y^{k-2}dy=(k-1)\Gamma(k-1)$$

k tamsayı olduğunda,

$$\Gamma(k)=(k-1)!\Gamma(1) // and // \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-y}dy=1$$

$$That \backslash is, \backslash\backslash \Gamma(k)=(k-1)!$$

k=1 iken , gamma dağılımı $1/\lambda.$ ortalamalı üstel dağılıma dönüşür.

- Gamma rasgele değişkeninin özellikleri:

Eğer $X_i, i=1,\cdots,n$, $(k_i,\lambda),$ parametreleri ile bağımsız gamma rasgele değişkenleri ise o zaman $\sum_{i=1}^{n} X_i$, $(\sum_{i=1}^{n} k_i,\lambda).$ parametresi ile gamma dağılır.

- Parametresi $(1,\lambda)$ olan gamma rasgele değişkeni, parametresi $\lambda.$ olan üstel rasgele değişkene eşdeğerdir.

- Her biri λ parametreli bağımsız üstel rasgele değişkenleri $X_i, i=1,\cdots,n$ ise bu durumda $\sum_{i=1}^{n} X_i$, $(n,\lambda).$ parametresi ile gamma dağılır.

4.3.2 Gamma Dağılımı Örnekleri

- Örnek 32 (Çelik Kiriş Kırıkları) :

$$X_1, \cdots, X_k \text{ iid } with \ \mathrm{E}(\lambda)$$

then

$$X = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i \sim G(k, \lambda) \quad (why?)$$

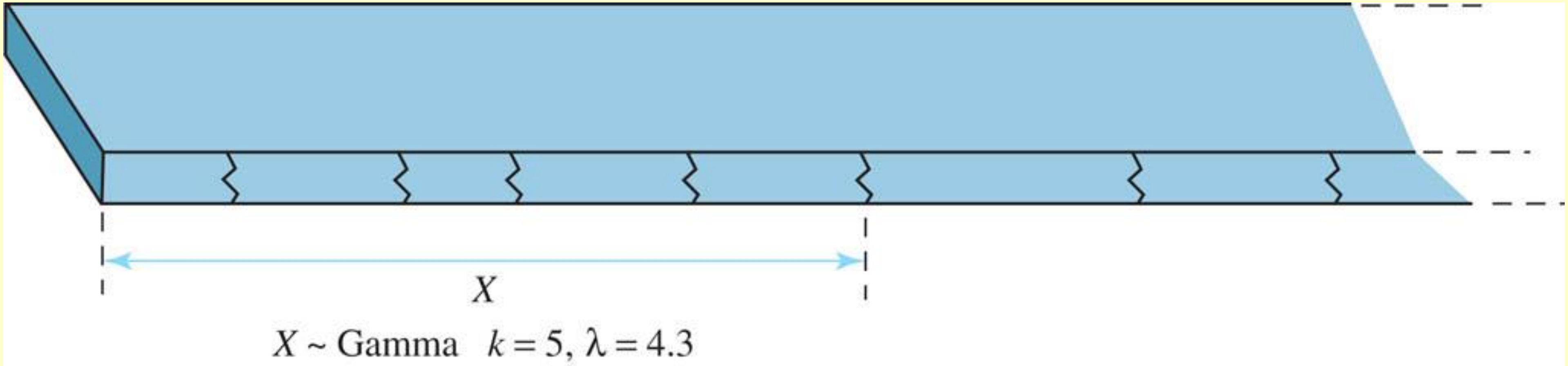
- Y= kirişin 1 m içindeki kırılma sayısı

$$Then$$

$$Y \sim Poisson(\lambda)$$

$$and$$

$$P(X \le 1) = P(Y \ge k) \quad (why?)$$



Beşinci kırığa olan uzaklık, k = 5 ve λ = 4.3 parametrelerine sahip bir gamma dağılımına sahiptir.

$$X_i \sim E(\lambda), \backslash \lambda = 4.3,$$

$$Then, \backslash X = \sum_{i=1}^{5} X_i \backslash is$$

$$Gamma \backslash r.v. \backslash with \backslash k = 5 \backslash and \backslash \lambda = 4.3.$$

$$E[X] = \frac{k}{\lambda} = \frac{5}{4.3} = 1.16[m]$$

$$P\{X \leq 1\} = F(1) = 0.4296 \backslash (from \backslash numerical \backslash computation)$$

$$Let \backslash Y \sim P(\lambda). \backslash Then, \backslash P\{Y \geq 5\} = 0.4296$$

4.4 Weibull Dağılımı
4.4.1 Weibull Dağılımının Tanımı

- Başarısızlık ve bekleme sürelerini modellemek için kullanışlıdır.
- Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

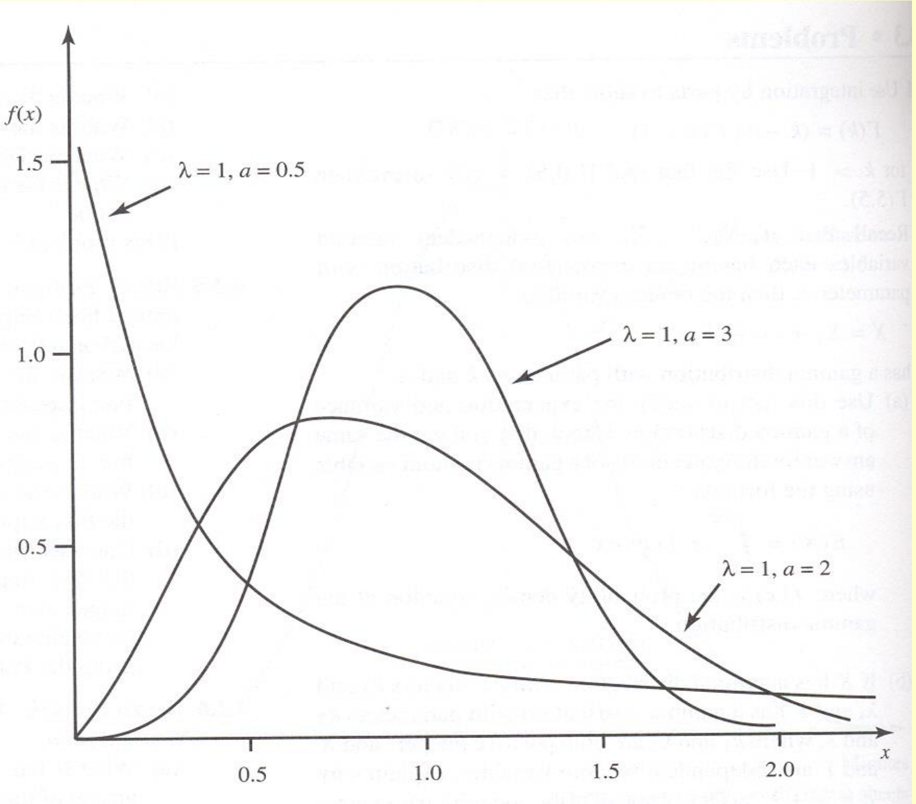
$$f(x) = a\lambda(\lambda x)^{a-1} e^{-(\lambda x)^a} \quad for \quad a > 0, \ \ \lambda > 0$$

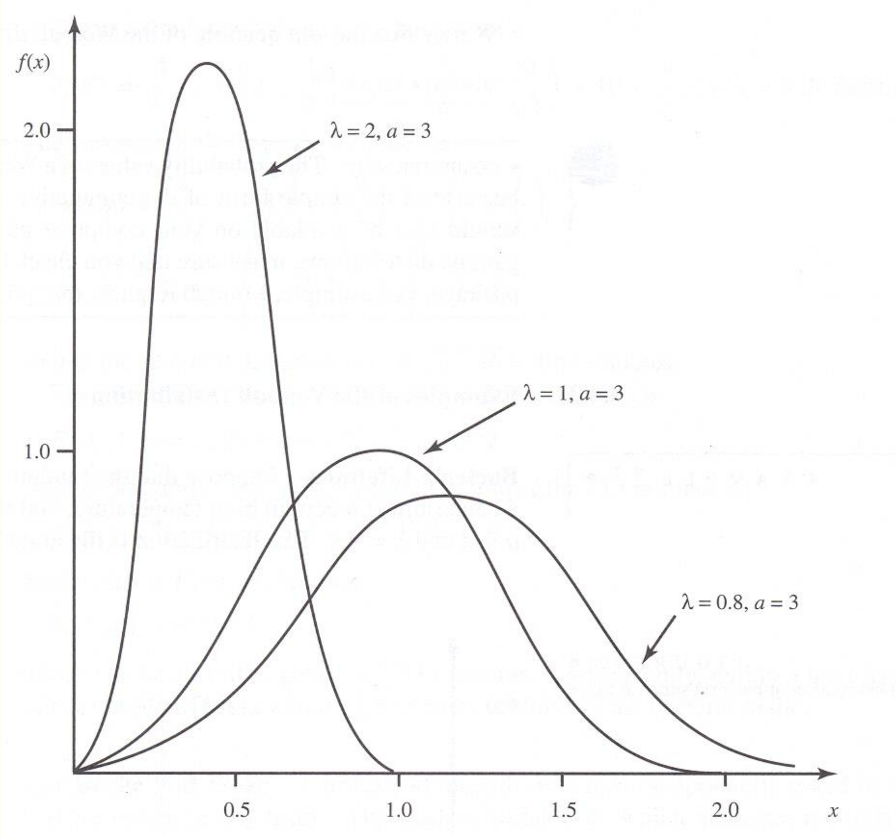
- Ortalama ve varyans:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\Gamma(1+\frac{1}{a})$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\Gamma(1+\frac{2}{a}) - \left[\Gamma(1+\frac{1}{a})\right]^2\right\}$$

Weibull dağılımının eğrileri





$$f(x) = a\lambda(\lambda x)^{a-1} e^{-(\lambda x)^a}$$

Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu:

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^a}$$

Weibull dağılımının p. yüzdeliği :

x i bulurken; $F(x) = p.$

$$1 - e^{-(\lambda x)^a} = p$$

$$e^{-(\lambda x)^a} = 1 - p$$

$$-(\lambda x)^a = \ln(1 - p)$$

$$x = \frac{(-\ln(1 - p))^{1/a}}{\lambda}$$

4.5 Beta Dağılımı

- Oranları ve kişisel olasılıkları modellemek için kullanışlıdır

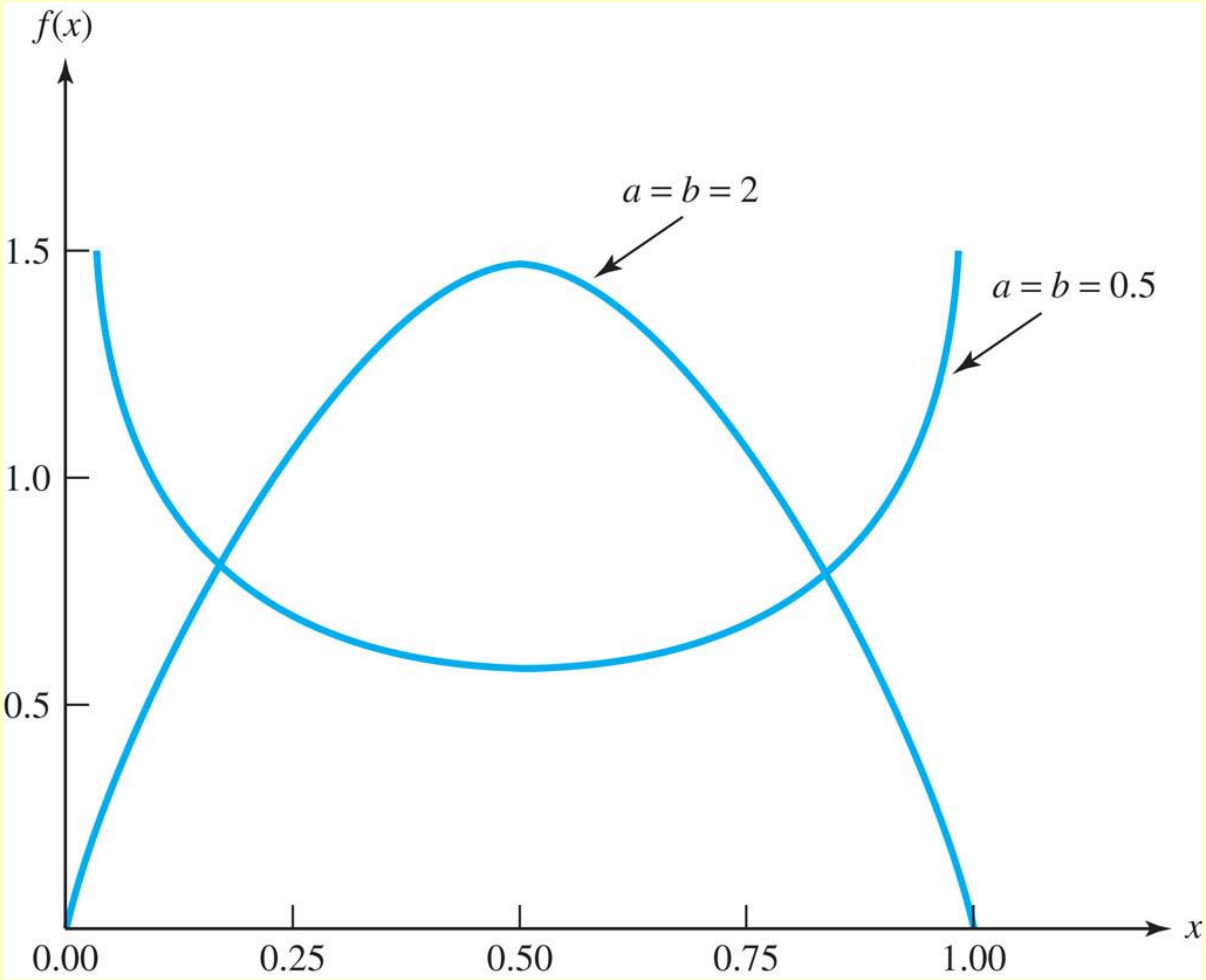
- Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{(b-1)}$$

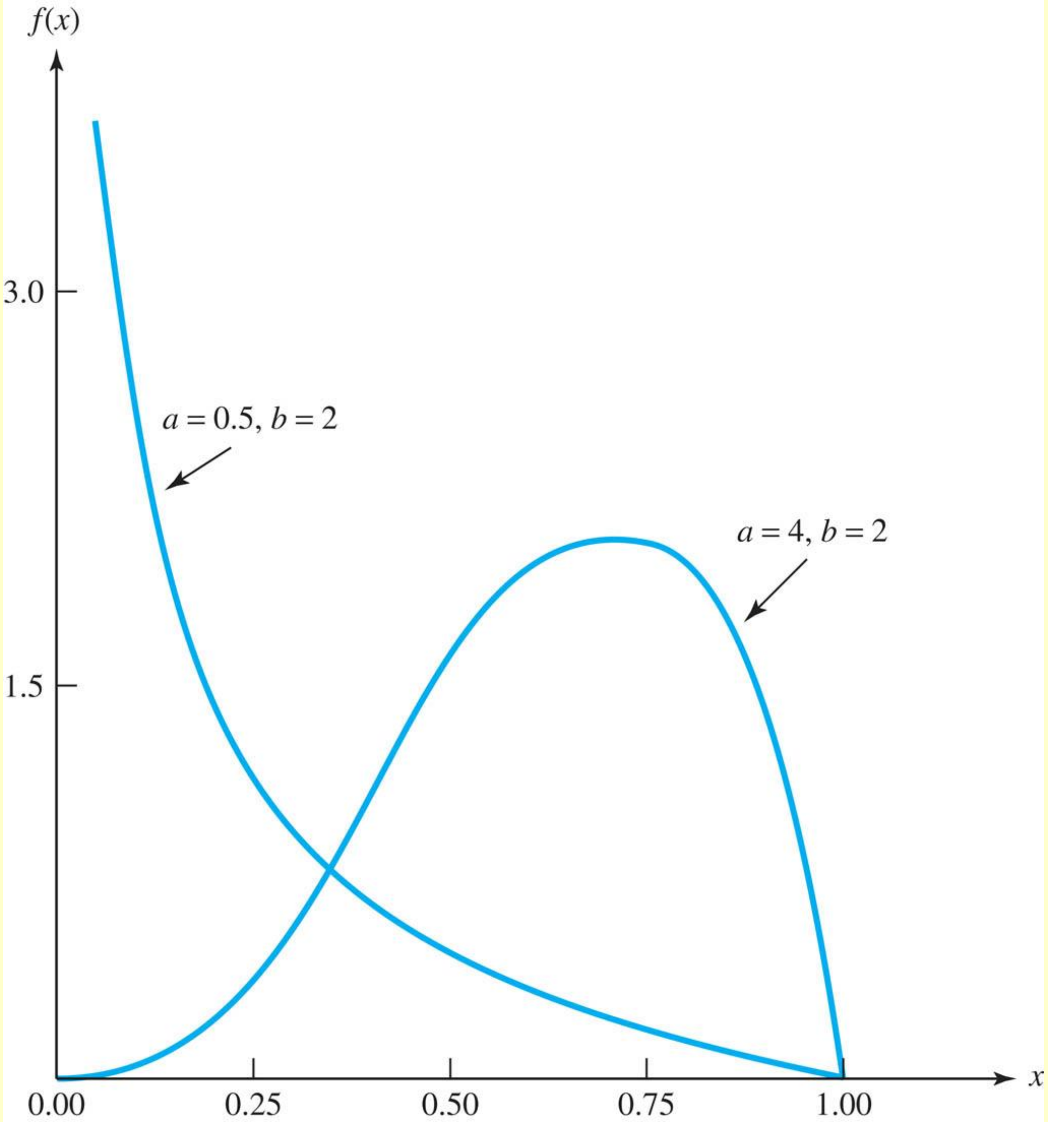
- Ortalama ve varyans:

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$V(X) = \frac{1}{a+b+1}\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b}$$



Beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonları



Beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonları

- Örnek: Beta dağılımı ve yağmur fırtınaları.

ABD Hava Durumu Servisi tarafından Alberquerque'de toplanan veriler, hem yaz hem de yaz mevsimi dışında meydana gelen fırtınaların ilk 5 dakikasında düşen toplam yağış miktarını göstermektedir. 14 adet yaz mevsimi dışındaki fırtına için veriler, a = 2.0 ve b = 8.8 ile beta dağılımı tanımlansın.

- X, yağmurun ilk 5 dakikasında düşen kısmı olsun. Daha sonra, ilk 5 dakika boyunca yağmurun % 20'sinden daha fazla bir oranda düşme olasılığı:

$$P\{X > 0.2\} = \frac{\Gamma(2.0+8.8)}{\Gamma(2.0)\Gamma(8.8)} \int_{0.2}^{1.0} u^{1.0}(1-u)^{7.8}\,du = (86.24)(0.0045) = 0.39.$$