SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 5
NORMAL DAĞILIM
5.1 Normal Dağılım Kullanarak Olasılık Hesaplama
5.2 Normal Rasgele Değişkenlerin Doğrusal Bileşimleri

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

5.1 Normal Dağılım Kullanarak Olasılık Hesaplama

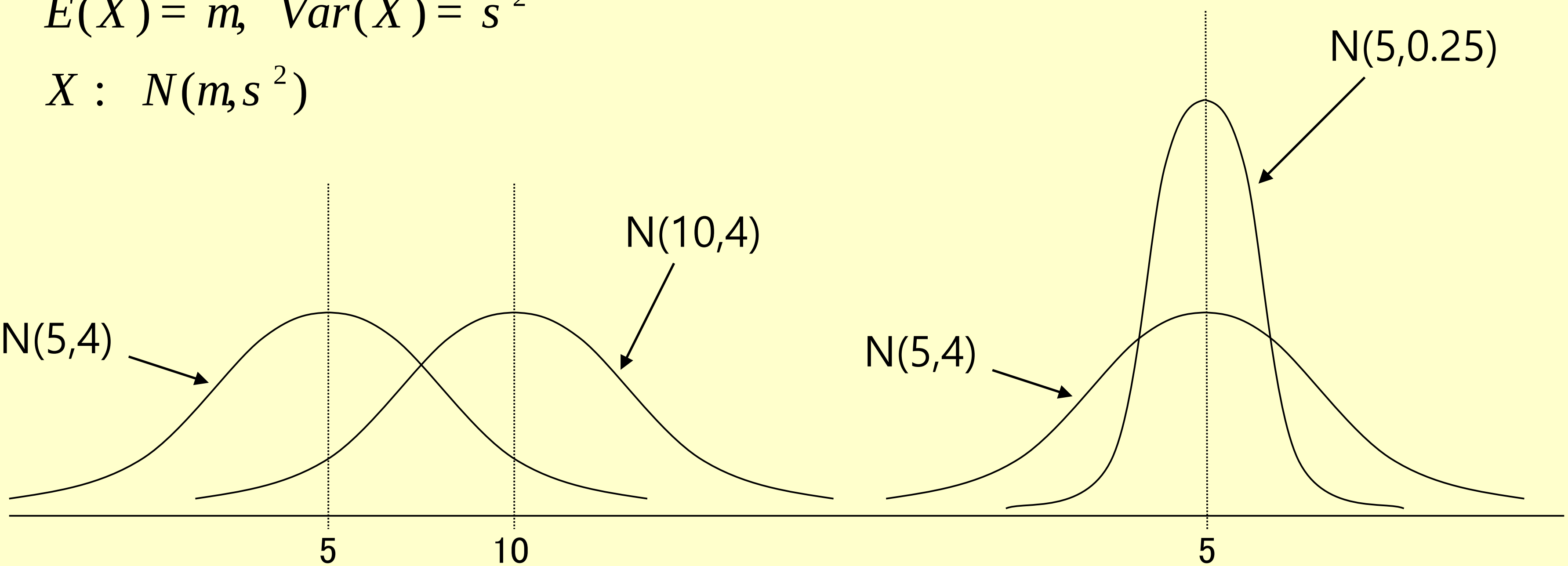
5.1.1 Normal Dağılım Tanımı

gNormal Distribution

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-(x-m)^2/2s^2} \quad (- ¥ \; £ \; x £ \; ¥ \;)$$

$$E(X) = m, \quad Var(X) = s^2$$

$$X : \quad N(m, s^2)$$



5.1.2 Standart Normal Dağılım

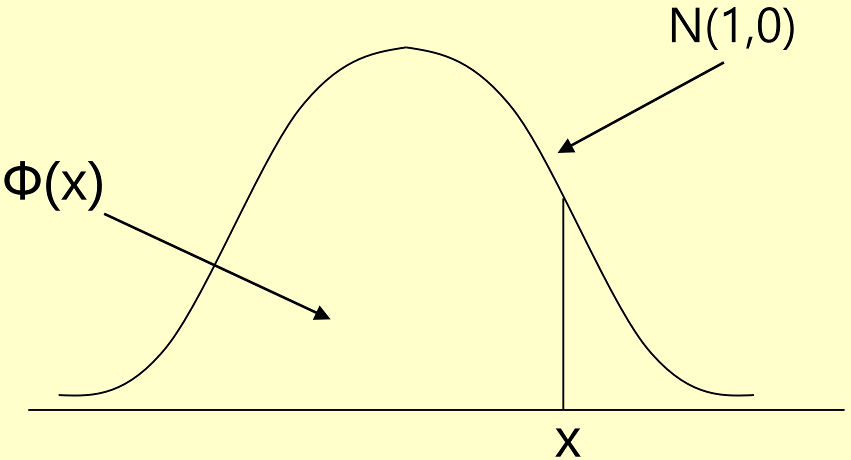
- The Standard Normal Distribution

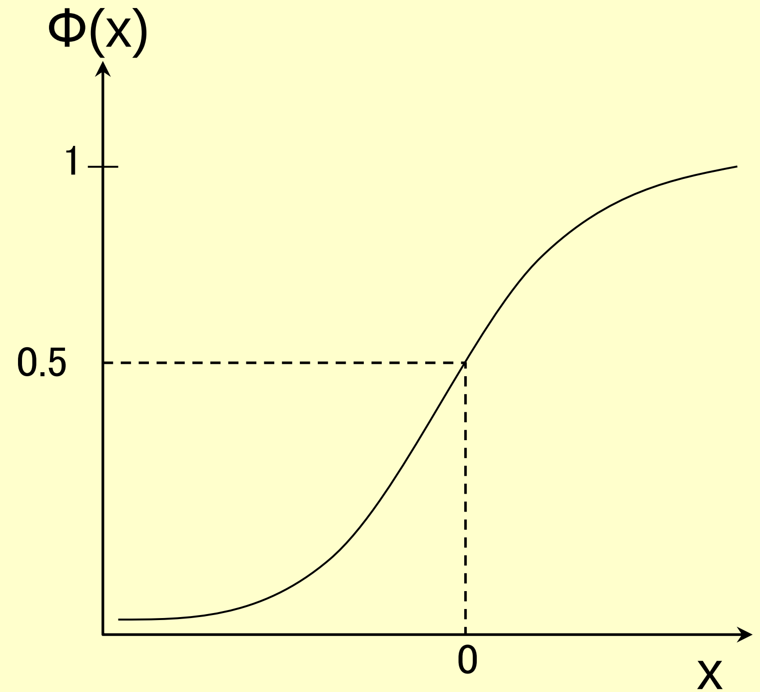
$$\text{p.d.f}: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (-\infty \le x \le \infty)$$

$$\textit{where } \mu = 0 \textit{ and } \sigma^2 = 1.$$

$$\text{c.d.f}: \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

$$1 - \Phi(x) = P(Z \ge x) = P(Z \le -x) = \Phi(-x)$$





5.1.4 Normal Dağılım Örnekleri (1/3)

- Örnek : Domates Fidesinin Boyu

Domates fidesinin boyu: ortalama=29.4cm, standart sapma=2.1cm

(1) Chebychev eşitsizliği kullanılarak

En az %75 inin boyu , [25.2, 33.6] aralığı içindedir.

(2) Normal dağılım varsayımı altında, 1-α olasılığı ile X in aralığı:

$$[\mu - \sigma z_{\alpha/2}, \mu + \sigma z_{\alpha/2}] = [29.4 - 2.1 z_{\alpha/2}, 29.4 + 2.1 z_{\alpha/2}]$$

Böylece, $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ kullanılarak X in %90 kapsama alanındaki aralığı [25.95, 32.85] olur.

(3) Yüksekliğin 29cm ve 30cm arasında olma olasılığı

$$P(29.0 \le X \le 30.0) = \Phi\left(\frac{30.0 - 29.4}{2.1}\right) - \Phi\left(\frac{29.0 - 29.4}{2.1}\right)$$

$$= \Phi(0.29) - \Phi(-0.19) = 0.19$$

5.1.4 Normal Dağılım Örnekleri (2/3)

- Örnek : Beton Blok Ağırlıkları

  Beton blok ağırlığı ~N(11.0, 0.3^2)

  (1) X'in% 99'luk kapsama alanı :

  $$[\mu-\sigma z_{0.005}, \mu+\sigma z_{0.005}]=[10.23, 11.77].$$

(2) Bir beton blokun 10,5 kg'den az olması olasılığı;

$$P(X \le 10.5) = P(-\infty \le X \le 10.5)$$

$$= \Phi\left(\frac{10.5-11.0}{0.3}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-11.0}{0.3}\right)$$

$$= \Phi(-1.67) - \Phi(-\infty) = 0.0475$$

5.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimleri

5.2.1 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerinin Dağılımı (1/2)

<u>Normal Rasgele Değişkeninin Doğrusal Fonksiyonu</u>

$$X : \; N(m, s^{2})$$

$$Ş \;\; Y = aX + b : \; N(am + b, a^{2}s^{2}) \; for\ constant\ a, b$$

$$X_{1} : \; N(m_{1}, s_{1}^{2}) \;\; and \;\; X_{2} : \; N(m_{2}, s_{2}^{2}) \; are\ independent$$

$$Ş \;\; Y = X_{1} + X_{2} : \; N(m_{1} + m_{2}, s_{1}^{2} + s_{2}^{2})$$

5.2.1 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerinin Dağılımı (2/2)

<u>Bağımsız Normal Rasgele Değişkenlerinin Özellikleri</u>

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ 1 \le i \le n \text{ are independent}$$

$$a_i,\ 1 \le i \le n, \text{ and } b \text{ are constants}$$

$$\Rightarrow\ Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{where } \mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n + b,\ \sigma^2 = a_1\sigma_1^2 + \cdots + a_n\sigma_n^2$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ 1 \le i \le n \text{ are independent}$$

$$\Rightarrow\ \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ where } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $What\ \ if\ \ X_1, \ldots, X_n\ are\ not\ independent\ ?$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (1/6)

- Örnek: Piston Başı Yapısı

  X_1~N(30.00, 0.05^2),: piston yarıçapı

  X_2~N(30.25, 0.06^2) : silindir yarıçapı

  (1) $Y=X_2- X_1$

  Y~N(30.25-30.00, 0.05^2+ 0.06^2)=N(0.25, 0.0061)

  (2) Piston başının silindir içine sığmaması olasılığı;

$$P(Y \le 0) = \Phi\left(\frac{0-0.25}{\sqrt{0.0061}}\right) = \Phi(-3.20) = 0.0007$$

  (3) Y nin 0.10mm ve 0.35mm aralığında olma olasılığı

$$P(0.10 \le Y \le 0.35) = \Phi\left(\frac{0.35-0.25}{\sqrt{0.0061}}\right) - \Phi\left(\frac{0.10-0.25}{\sqrt{0.0061}}\right)$$

$$= \Phi(1.28) - \Phi(-1.92) = 0.8723$$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (2/6)

- Örnek : Domates Fidesi Boyu

  (1) ortalama boy dağılımı

$$X_i \sim N(29.4,\ 2.1^2),\ 1 \le i \le n = 20$$

$$\Rightarrow\ \bar{X} \sim N\left(29.4,\ \frac{2.1^2}{20}\right) = N(29.4,\ 0.2205)$$

  (2) %95 kapsam alanında X in aralığı ($z_{0.025}$=1.96)

$$[29.4 - (1.96 \times \sqrt{0.2205}),\ 29.4 + (1.96 \times \sqrt{0.2205})]$$

$$= [28.48,\ 30.32]$$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (3/6)

- Örnek : Beton Blok Ağırlıkları

$$(1)\ X_i \sim N(11.0,\ 0.3^2),\ 1 \le i \le n = 24$$

$$\Rightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{24} \sim N\left(11.0 \times 24,\ 0.3^2 \times 24\right) = N\left(264.0,\ 2.16\right)$$

$$(2)\ \mathit{Interval\ \ of\ \ X\ \ with}\ 99.7\%\ \mathit{coverage}:$$

$$[264.0 - (3 \times 1.47),\ 264.0 - (3 \times 1.47)] = [259.59,\ 268.41]$$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (4/6)

- Örnek : Stok Fiyatları

  X_A~N(8.0, 1.5^2)=N(8.0, 2.25) : şirket A nın yıllık getirisi

  X_B~N(9.5, 4.00) : şirket B nin yıllık getirisi

  (1) B'nin hisse senetlerinin yeterli olmama olasılığı;

$$P(X_B \leq 5.0) = \Phi\left(\frac{5.0 - 9.5}{2.0}\right) = \Phi(-2.25) = 0.0122$$

  (2) B'nin hisse senetlerinin mükemmel olma olasılığı;

$$P(10.0 \leq X_B) = 1 - \Phi\left(\frac{10.0 - 9.5}{2.0}\right) = 1 - \Phi(0.25) = 0.4013$$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (5/6)

- Şirket B'nin hisse senetlerinin A dan daha iyi performans gösterme olasılığı nedir?

  $Y=X_B-X_A$, $Y \sim N(9.5-8.0,\ 4.00+2.25)=N(1.5,\ 6.25)$

  (1) Gerekli olasılık

$$P(Y \geq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-1.5}{\sqrt{6.25}}\right) = 1 - \Phi\left(-0.6\right) = 0.7257$$

  (2) B'nin hisse senedi performansının A'dan en az iki yüzdelik daha yüksek olması olasılığı;

$$P(Y \geq 2.0) = 1 - \Phi\left(\frac{2.0-1.5}{\sqrt{6.25}}\right) = 1 - \Phi\left(0.2\right) = 0.4207$$

5.2.2 Normal Rasgele Değişkenlerinin Doğrusal Bileşimlerine İlişkin Örnekler (6/6)

- Örnek : Kimyasal Yoğunlaşma Seviyesi C 2 metotla ölçülmekte.
- X_A~N(C, 2.97) : Metot A
  X_B~N(C, 1.62) : Metot B
- %99.7 kapsama aralığı:
  [C-5.17, C+5.17] : Metot A
  [C-3.82, C+3.82] : Metot B
- İki yöntemi birleştirerek (Y) değişkenlik en aza indirilebilir.
- Bundan sonra,% 99,7 kapsama alanı ile Y aralığı
  [C-3.07, C+3.07]

$$y = px_A + (1-p)x_B$$

$$\text{Ş} \quad Y = pX_A + (1-p)X_B \sim N(m_Y, s_Y^2)$$

where

$$m_Y = pE(X_A) + (1-p)E(X_B)$$

$$= pC + (1-p)C = C$$

$$s_Y^2 = p^2 Var(X_A) + (1-p)^2 Var(X_B)$$

$$= p^2 2.97 + (1-p)^2 1.62$$

To minimize s_Y^2,

$$\frac{ds_Y^2}{dp} = 5.94p - 3.24(1-p)$$

$$\text{Ş} \quad p = 0.35 \textit{ is optimal and } s_Y^2 = 1.05$$

$$\backslash \quad y = 0.35x_A + 0.65x_B$$