SAB101 OLASILIK

BÖLÜM 5
NORMAL DAĞILIM
5.3 Normal Dağılım ile Dağılımlara Yakınsama
5.4 Normal Dağılım ile İlgili Dağılımlar

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

5.3 Normal Dağılım ile Dağılımlara Yakınsama

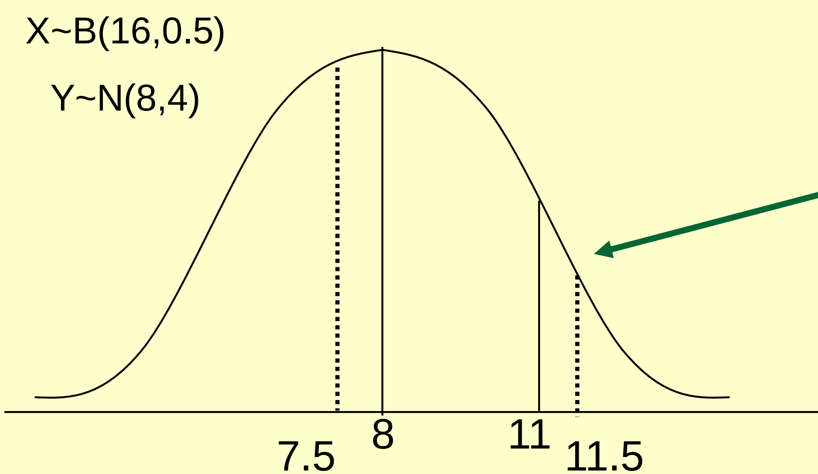
5.3.1 Binom Dağılımının Normale Yakınsaması

$$B(n,p) \to N(np, np(1-p))$$

$$X \sim B(n,p)$$

- $P(X \le x) \approx \Phi\left(\dfrac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ *and* $P(X \ge x) \approx 1-\Phi\left(\dfrac{x-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

This approximation works well as long as $np \ge 5$ *and* $n(1-p) \ge 5$.



$X \sim B(16, 0.5)$ and $Y \sim N(8,4)$

$$P(8 \le X \le 11) = \sum_{x=8}^{11} \binom{16}{x} 0.5^x \times 0.5^{16-x} = 0.5598$$

$$P(7.5 \le Y \le 11.5) = \Phi\left(\frac{11.5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{7.5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{11.5-8.0}{2.0}\right) - \Phi\left(\frac{7.5-8.0}{2.0}\right)$$

$$= \Phi(1.75) - \Phi(-0.25) = 0.5586$$

5.3.2 Merkezi Limit Teoremi

$$X_i \overset{iid}{\sim} \Delta(\mu, \sigma^2),\ 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \to N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

($X_i \overset{iid}{\sim} \Delta(\mu, \sigma^2)$: X_i*'s are independent and identically distributed with mean* μ *and variance* σ^2 *for some distribution* Δ.)

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri (1/6)

- Örnek: Süt Kabı İçeriği

  X~B(20, 0.261) : düşük kilolu sayısı

  Y~N(20x0.261, 20x0.261x(1-0.261))=N(5.22, 3.86) : yaklaşım

  (1) Bir kutuda 3 den fazla düşük kilolu kap bulundurma olasılığı;

$$P(X \leq 3) = 0.1935$$

$$P(Y \leq 3.5) = \Phi\left(\frac{3.5 - 5.22}{\sqrt{3.86}}\right) = 0.1922$$

  Şimdiki varsayım X~B(500, 0.261).

  Sonra Y~N(500x0.261, 500x0.261x(1-0.261))=N(130.5, 96.44)

  (2) 500 den en az 150 tanesinin düşük kilolu olma olasılığı:

$$P(X \geq 150) \simeq P(Y \geq 149.5) = 1 - \Phi\left(\frac{149.5 - 130.5}{\sqrt{96.44}}\right) = 0.0268$$

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri(2/6)

- Örnek : Büyükbaş Hayvan Aşılama

  ciddi bir olumsuz reaksiyona neden olma olasılığı : 0.0005

  X : Olumsuz bir reaksiyona girecek hayvanların sayısı

  X~B(500000, 0.0005)

$$E(X) = 500,000 \times 0.0005 = 250$$

$$Var(X) = 500,000 \times 0.0005 \times 0.9995 = 249.9$$

$$Y \sim N(250,\ 249.9)$$

$$\textit{Interval of } X \textit{ with } 99.7\% \textit{ coverage}:$$

$$\Rightarrow [250 - (3 \times \sqrt{249.9}),\ 250 + (3 \times \sqrt{249.9})]$$

$$= [202.6,\ 297.4]$$

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri (3/6)

- Örnek: Cam Levha Çatlakları

  X : cam levhadaki çatlak sayısı

  X~Poisson(λ=0.5)

  (1) 100 adet camın toplam sayısının (X) dağılımı

$$\mu = \sigma^2 = 0.5 \Rightarrow \quad X \sim N(100 \times \mu, 100 \times \sigma^2) = N(50, 50)$$

  (2) 100 levhada 40'tan az çatlak olma olasılığı

$$P(X \le 40) \approx \Phi\left(\frac{40 - 50}{\sqrt{50}}\right) = \Phi(-1.41) = 0.0793$$

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri(4/6)

(3) X ortalamasının 0.45 ile 0.55 arasında olma olasılığı:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{100}\right) = N(0.5, 0.005)$$

$$P(0.45 \le \bar{X} \le 0.55) \approx \Phi\left(\frac{0.55 - 0.50}{\sqrt{0.005}}\right) - \Phi\left(\frac{0.45 - 0.50}{\sqrt{0.005}}\right)$$

$$= \Phi(0.71) - \Phi(-0.71) = 0.5222$$

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri(5/6)

- Örnek : İstiridyeden İnci Üretimi

  İstiridyenin en az 4 mm çapında bir inci üretme olasılığı 0.6'dır.

  İstiridye çiftçisinin, en az 1000 inciye sahip olma konusunda% 99 güven düzeyinde kaç tane istiridye yetiştirmesi gerekir?

  X : incilerin sayısı

  X~B(n, 0.6)⇒Y~N(0.6n, 0.24n)

$$P(X \geq 1000) \approx P(Y \geq 999.5) = 1 - \Phi\left(\frac{999.5 - 0.6n}{\sqrt{0.24n}}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi(x) \leq 0.01 \Rightarrow x \leq -2.33$$

$$\Rightarrow \frac{999.5 - 0.6n}{\sqrt{0.24n}} \leq -2.33 \Rightarrow \quad \therefore n \geq 1746$$

5.3.3 Normal Yaklaşımların Kullanım Örnekleri(6/6)

- Sonuç olarak, çiftçi en az 1000 adet inci için % 99 güven düzeyinde yaklaşık 1750 istiridye yetiştirmelidir.
- Beklenen inci sayısı ve standart sapması

$$E(X) = 1750 \times 0.6 = 1050$$

$$Var(X) = 1750 \times 0.6 \times 0.4 = 20.5^2$$

- İnci çapının 5.0 ve varyans 8.33 olduğunu hatırlayın. 1750 inci elde edilirse, ortalama çap ortalaması 5,0 ve varyans 0,00476'dır (= 8.33 / 1750).
- Ortalama çapın% 99,7 yi kapsama aralığı;

$$[5.0 - (3 \times \sqrt{0.00476}), 5.0 + (3 \times \sqrt{0.00476})] = [4.8, 5.2]$$

5.4 Normal Dağılım ile İlgili Dağılımlar

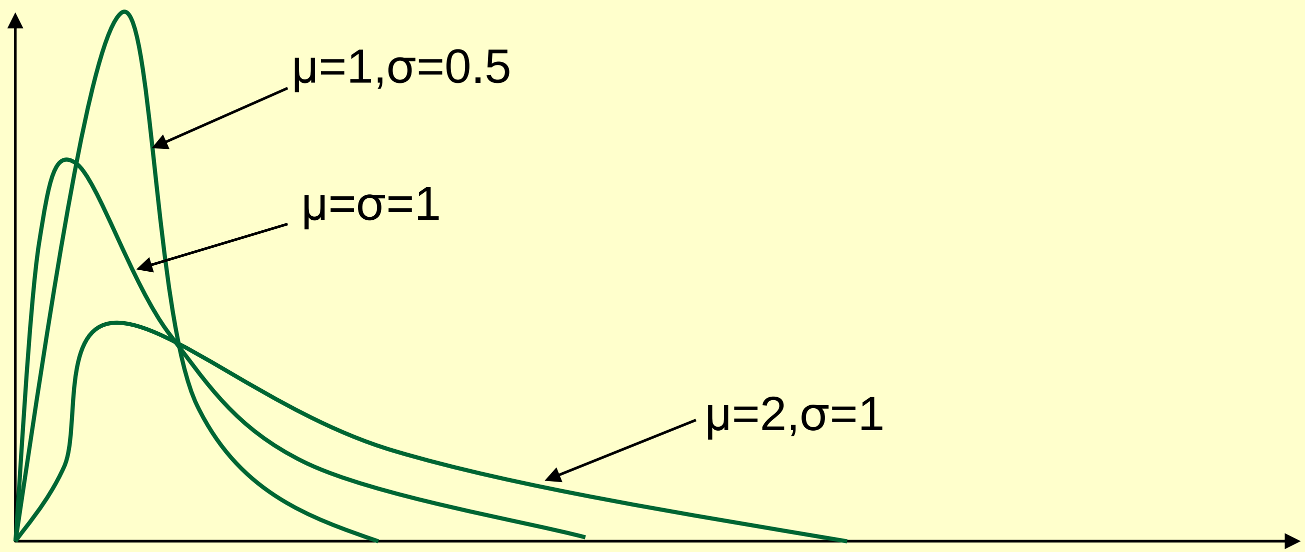
5.4.1 Lognormal Dağılım

$$Y = \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$pdf: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2} \quad for\ x \geq 0, \quad 0 \quad for\ x < 0.$$

$$cdf: F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}, \quad Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$



5.4.2 Ki-Kare Dağılımı

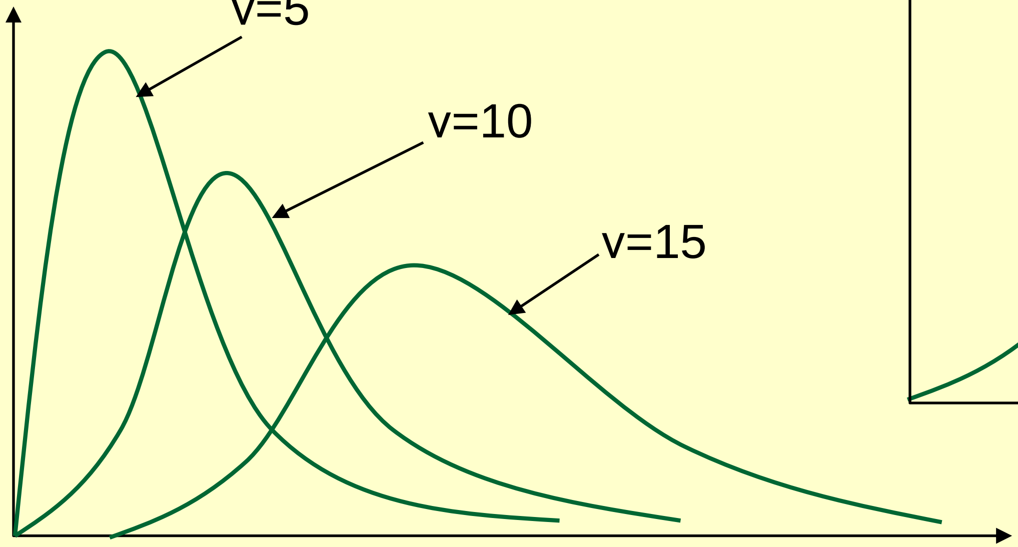
A chi-square random variable X with v degrees of freedom is

$$X = X_1^{2} + \mathrm{L} + X_n^{2}$$

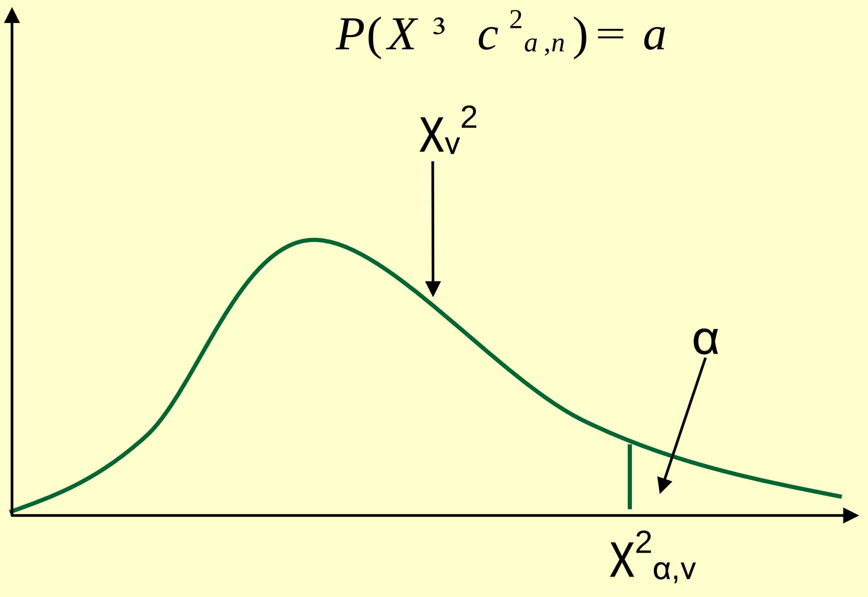
where X_i : $N(0,1)$ are independent.

X is a Gamma distribution with parameter $l = 1/2$ and $k = v/2$, and

$$E(X) = v, \quad Var(X) = 2v.$$



$$P(X \; ^{3} \; c^{2}_{a,n}) = a$$



Ki-Kare Dağılımı:

$$X_i \sim N(0,1), \quad X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2,$$

$$and \backslash X_i s \backslash are \backslash independent \backslash each \backslash other. \ \text{Then}, X \sim \chi_\nu^2.$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \frac{(1/2)e^{-x/2}(x/2)^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)}, x > 0$$

Ortalama ve varyans:

$$E[X] = \nu, \backslash Var(X) = 2\nu$$

$$X \Rightarrow Gamma \backslash random \backslash r.v. \backslash with \backslash parameters \backslash$$

$$\lambda = 1/2 \backslash and \backslash k = \nu/2$$

Örnek: Koordinat hatalarının, ortalama 0 ve standart sapma 2 ile bağımsız normal rasgele değişkenler olduğunu varsayalım. Seçilen nokta ile hedef arasındaki mesafenin 3'ü aşma olasılığını bulun.

$$D^2 = X_1^2 + X_2^2$$

$$X_i, i = 1,2 \ are \ coordinate \ errors.$$

$$D^2/4 \sim \chi_2^2 \ and \ we \ obtain$$

$$P\{D^2 > 9\} = P\{D^2/4 > 9/4\}$$

$$D^2/4 \sim \chi_2^2 \sim Gamma \ r.v. \ with \ parameters$$

$$k = 1 \ and \ \lambda = 1/2 \sim E(\lambda = 1/2).$$

$$P\{D^2/4 > 9/4\} = P\{X > 9/4\} = e^{-(1/2)(9/4)} \approx 0.3247$$

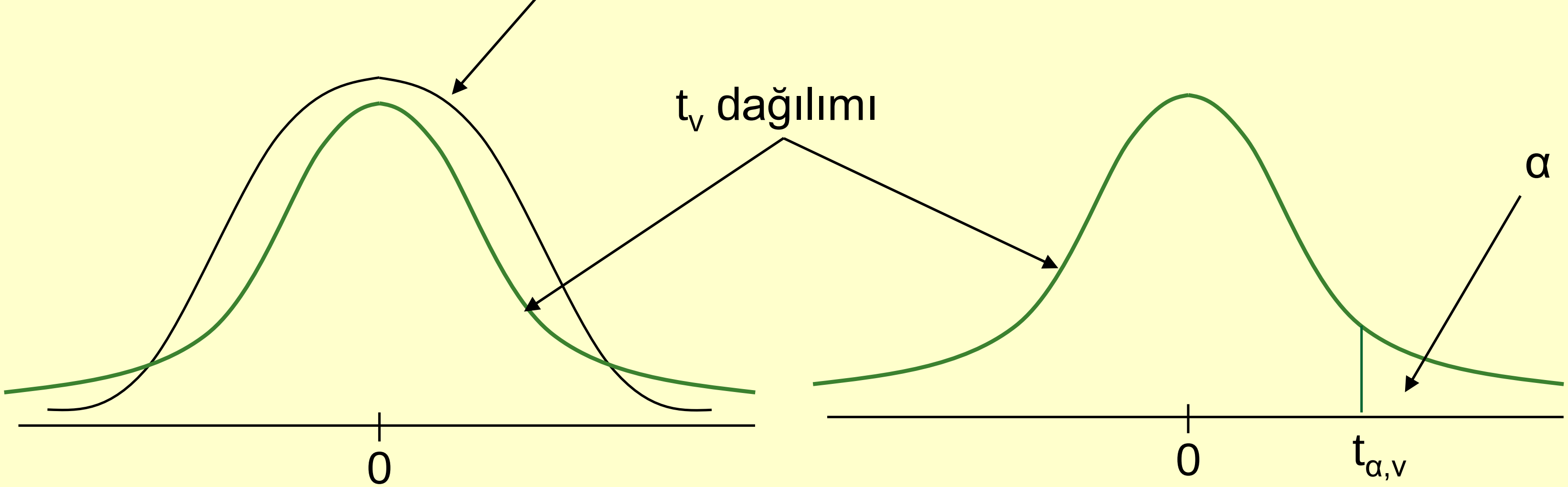
5.4.3 t–Dağılımı

$$T_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{W/\nu}} \rightarrow N(0,1) \quad as\ \nu \rightarrow \infty$$

$$where\ Z:\ N(0,1)\ \ and\ W:\ \chi^2_\nu\ are\ indenpendent.$$

$$P(X \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha$$

$$P\left(|X| \leq t_{\alpha/2,\nu}\right) = P(-t_{\alpha/2,\nu} \leq X \leq t_{\alpha/2,\nu}) = 1-\alpha$$



t−yoğunluğu sıfır civarında simetriktir.

Eğer ν büyürse, dağılım gittikçe standar normal dağılıma benzeyecektir çünkü;

$$W \;\square\; \chi_{\nu}^{2} \backslash and \backslash W/\nu = (Z_1^2 + \cdots + Z_{\nu}^2)/\nu \approx E[Z_i^2] = 1.$$

Ortalama ve varyans:

$$E[T_{\nu}] = 0, \backslash \nu > 1$$

$$Var(T_{\nu}) = \nu/(\nu - 2), \backslash \nu > 2$$

Sabit $t_{\alpha,\nu}$ $P\{T_{\nu} \geq t_{\alpha,\nu}\} = \alpha$ olarak tanımlanır.

Sıfır civarında simetrik olduğundan,

$$P\{T_{\nu} \geq -t_{\alpha,\nu}\} = 1 - \alpha.$$

Yani,

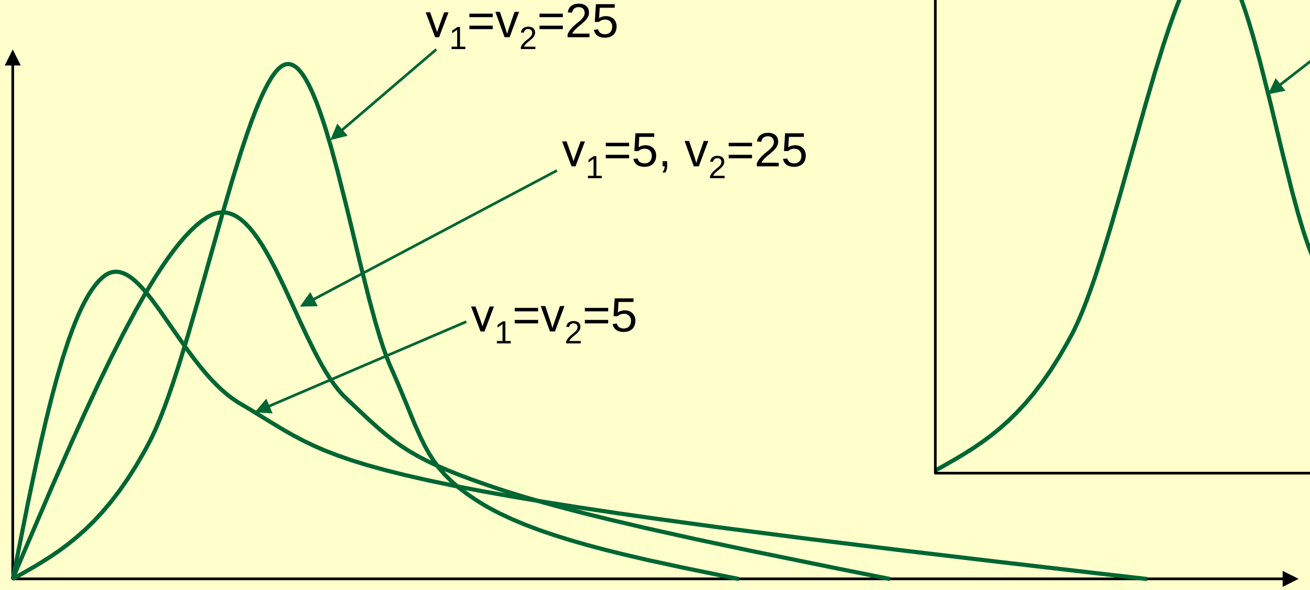
$$-t_{\alpha,\nu} = t_{1-\alpha,\nu}$$

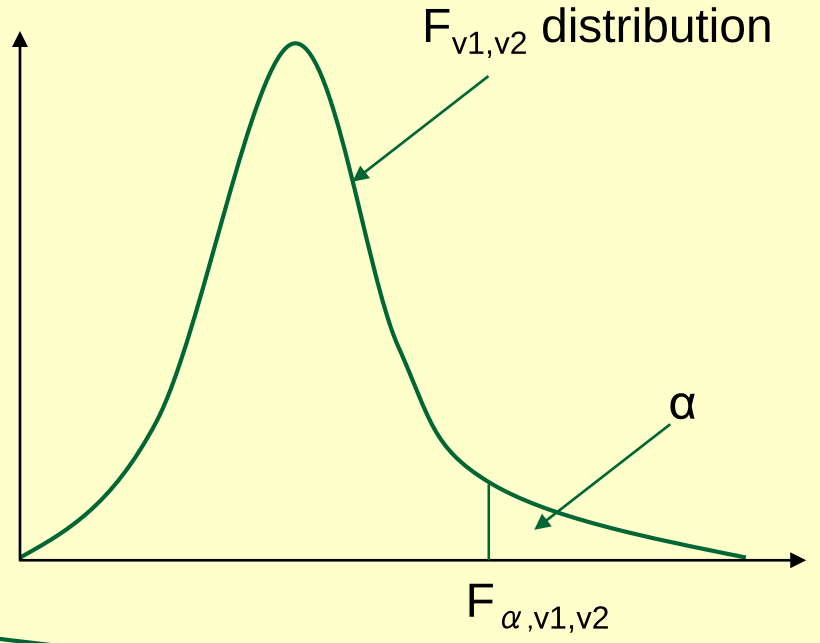
5.4.4 F-Dağılımı

- $\dfrac{W_1/n_1}{W_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$

  $where\ W_1 :\ c^{2}_{n_1}\ and\ W_2 :\ c^{2}_{n_2}\ are\ independent.$

- $F_{1-a,n_1,n_2} = \dfrac{1}{F_{a,n_2,n_1}}$





$$X \sim F_{\nu_1,\nu_2} \text{ and } Y \sim F_{\nu_2,\nu_1}.$$

Sabit F_{α,ν_1,ν_2} $P\{X > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\} = \alpha$ olarak tanımlanır.

O zaman,

$$\alpha = P\{X > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\}$$

$$= \{Y < 1/F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\}$$

$$= 1 - P\{Y \geq 1/F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\}.$$

Yani, $P\{Y \geq 1/F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\} = 1-\alpha.$

Tanımdan, $P\{Y \geq F_{1-\alpha,\nu_2,\nu_1}\} = 1-\alpha.$

$$\Rightarrow 1/F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = F_{1-\alpha,\nu_2,\nu_1}$$

$eg.$

$$F_{0.9,5,7} = 1/F_{0.1,7,5} = 1/3.37 = 0.2967$$

5.4.5 Çok Değişkenli Normal Dağılım

- İki değişkenli normal dağılımın özel durumu : $m_1 = m_2 = 0 \;\; and \;\; s_1 = s_2 = 1$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-(x^2 + y^2 - 2\rho xy)/2(1-\rho^2)\}$$

  - Fonksiyonun şekli ρ değişimiyle nasıl değişir?
  - X ve Y'nin marjinal dağılımı?

- Genel Çok Değişkenli Normal Dağılım

$$\mathbf{X} \sim N_k(m, S)$$

$$where \;\; \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) \;\; and \;\; m = (m_1, \ldots, m_k)$$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2p}\right)^{k/2} \left(\frac{1}{|S|}\right)^{1/2} \exp\{-(\mathbf{x} - m)' S^{-1} (\mathbf{x} - m)/2\}$$

· Distributions of X_i ?