

Bir Boyutlu Kesikli Dağılımlar

1. Kesikli Düzgün Dağılım

Bir rasgele deney sonucunda rasgele değişken eşit olasılıkla n farklı değer alabiliyorsa bu rasgele değişkenin olasılık dağılımına düzgün dağılım denir.

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad n = x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$E(X) = (n + 1)/2 \quad \text{Var}(X) = (n^2 - 1)/12$$

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, ***unidpdf(x,a,b)*** ile hesaplanır.

2. Bernoulli Dağılımı

Bir rasgele deney yapıldığında bu deneyin sadece iki sonucu varsa böyle bir deneye Bernoulli deneyi denir. Deney sonucunda başarı elde etme olasılığı p ise, X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad x = 0,1$$

$$E(X) = p \quad \text{Var}(x) = p(1 - p)$$

$$M_x(t) = (1 - p) + pe^tz$$

3. Binom Dağılımı

Bir Bernoulli deneyinin birbirinden bağımsız ve aynı koşullar altında n kez tekrarlanması ile oluşan deneye Binom deneyi denir. Deney sonucunda başarı elde etme olasılığı p ise, X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad x = 0,1,2, \dots, n$$

$$E(X) = np \quad \text{Var}(x) = np(1 - p)$$

$$M_x(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$$

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, ***binopdf(x,n,p)*** ile hesaplanır. Kümülatif dağılım fonksiyonunun değeri hesaplanmak istenilirse komutta *pdf* yerine *cdf* yazılarak ***binocdf(x,n,p)*** komutu kullanılır.

4. Geometrik Dağılım

Art arda n kez tekrar edilen Bernoulli denemelerinde ilk başarı elde edilene kadar yapılan denemelerin sayısı olan X rasgele değişkenin dağılımına geometrik dağılım denir.

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} \quad x = 1,2, \dots, n$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(x) = (1-p)/p^2$$

$$M_x(t) = (pe^t)/(1 - (1-p)e^t)$$

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, *geopdf(x,p)* ile hesaplanır.

5. Negatif Binom Dağılımı

Aynı şartlar altında bağımsız Bernoulli denemeleri $k \geq 1$ başarı elde edilinceye kadar yapılan deneylerin sayısı olan X rasgele değişkeninin dağılımına Negatif Binom dağılımı denir.

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \quad x = k, k+1, k+2, \dots$$

$$E(X) = k/p \quad \text{Var}(x) = k(1-p)/p^2$$

$$M_x(t) = [(pe^t)/(1 - (1-p)e^t)]^k$$

Not: Negatif Binom dağılımı, Geometrik dağılımların bir toplamı olarak düşünülebilir.

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, *nbinpdf(x,k,p)* ile hesaplanır.

6. Hipergeometrik Dağılım

N elemanın N_1 tanesi A türünden, N_2 tanesi B türünden olsun. N nesneden iadesiz olarak art arda n tanesi rasgele çekilsin. Çıkan A türünden elemanların sayısı olan X rasgele değişkeninin sahip olduğu dağılıma Hipergeometrik dağılımı denir.

$$P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, 2, \dots, N_1 \text{ ve } x \leq N_1 < N \quad N_1 + N_2 = N$$

$$E(X) = n \frac{N_1}{N} \quad \text{Var}(x) = n \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) \frac{N-n}{n-1}$$

$$M_x(t) = [(pe^t)/(1 - (1-p)e^t)]^k$$

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, *hygepdf(x,N,N1,n)* ile hesaplanır.

Örnek1: Düzgün bir paranın üç kez atılması deneyinde örnek uzay,

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

olmak üzere, X rasgele değişkeni üç atışta gelen turaların sayısı olsun. Bu durumda,

$$X \sim b \left(n = 3, p = \frac{1}{2} \right)$$

dir. X'in olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad x = 0,1,2,3$$

olasılık tablosu,

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = np = 3 * \frac{1}{2} = 1.5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.75$$

Matlab Kodu

```
>> x=0:3;
```

```
binopdf(x,3,1/2)
```

```
ans =
```

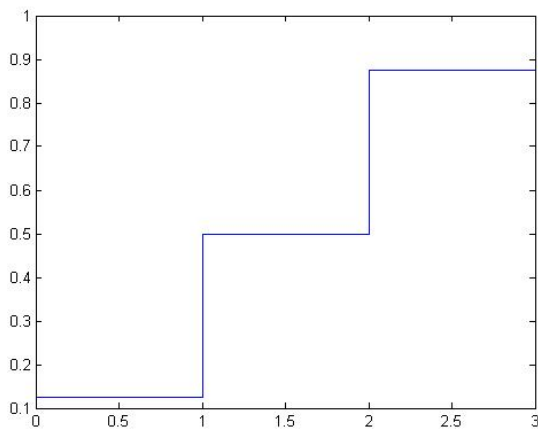
```
0.1250 0.3750 0.3750 0.1250
```

```
binocdf(x,3,1/2)
```

```
ans =
```

```
0.1250 0.5000 0.8750 1.0000
```

```
stairs(x,ans)
```



Örnek2: 5 seçenekli 20 soruluk bir test sınavında sorular rasgele işaretlendiğinde

- En az 10 doğru cevap verme olasılığı nedir?
- Doğru cevapların beklenen değeri nedir?

- c) Her doğru cevap için 1 ve 4 yanlış cevap için -1 puan verildiğinde 10 soru için beklenen puan nedir?

$$X \sim b(20, 1/5)$$

$$P(X = x) = \binom{20}{x} \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$$

a) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} = 0.0026$

Matlab Kodu

```
>> x=10:20;
```

```
>> sum(binopdf(x,20,1/5))
```

```
ans = 0.0026
```

% ya da

```
>> 1-binocdf(9,20,1/5)
```

```
ans = 0.0026
```

b) $E(X) = np = 20 * \frac{1}{5} = 4$

- c) K rasgele değişkeni 20 puandan elde edilen puanı gösterebilir.

$$K = 1 * X - \frac{1}{4} * (20 - X) = \frac{5}{4}X - 5$$

$$E(K) = \frac{5}{4}E(X) - 5 = \frac{5}{4} * 4 - 5 = 0$$

Örnek3: Bir atıcının her atışta hedefi vurma olasılığının aynı ve 2/3 olduğu biliniyor. Arka arkaya yapılan atışlar sonucunda hedefi ilk kez vurması için gereken atış sayısı X olsun.

- a) Hedefi ilk kez ikinci atışta vurma olasılığı nedir?
b) Hedefi en çok üçüncü atışta vurma olasılığı nedir?
c) Hedefi ilk kez vuruncaya kadar ortalama kaç atış gerekir ve X 'in varyansı nedir?

X 'in olasılık fonksiyonu ,

$$P(X = x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

a) $P(X = 2) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{2}{9}$

$$b) P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = 0.96$$

$$c) E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = 1.5 \quad \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1/3}{2/3^2} = 0.75$$

Örnek4: Hilesiz bir zar atılsın, 12.ci denemede 5.ci kez 3 elde etme olasılığını hesaplayınız?

$$P(X = 12) = \binom{12-1}{5-1} \frac{1^5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{12-5} \quad x = 5,6,7,..$$
$$= 0.45$$

Örnek4: İçinde 3 Beyaz, 2 Siyah top bulunan bir torbadan bir top çekilsin ve rengi gözlensin. Bu deneyi 50 kez tekrarlayan ve gelen Beyaz top sayısının ortalamasını bulan Matlab programını yazınız.

```
clc
clear all
>> n=50
bt=0;
st=0;
for i=1:n
a=rand;
if a<3/5
bt=bt+1;
else
st=st+1;
end
end
fprintf('gözlenen beyaz top sayısı=%d\n',bt)
fprintf('gözlenen siyah top sayısı=%d\n',st)
beyazort=bt/n
```

siyahort=st/n

Çıktı:

n = 50

gözlenen beyaz top sayısı=23

gözlenen siyah top sayısı=27

beyazort =

0.4600

siyahort =

0.5400