İki Değişkenli Olasılık Dağılımları

1. Kesikli Rasgele Değişkenler

1.1.Ortak Olasılık Fonksiyonu

$X\ ve\ Y$ aynı örnek uzayda tanımlanmış kesikli rasgele değişkenler olsun.

$$P(X = x, Y = y) = P(x, y)$$

fonksiyonuna $X\ ve\ Y$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu denir. Bu fonksiyonun ortak olasılık fonksiyonu olabilmesi için;

a) $P(x_i, y_i) \geq 0$; her gerçel $x_i\ ve\ y_i$ için,
b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(x_i, y_i) = 1$

şartlarını sağlamalıdır.

1.2.Marjinal Olasılık Fonksiyonu

$X\ ve\ Y$ aynı örnek uzayda tanımlanmış kesikli rasgele değişkenler olsun. Ortak olasılık fonksiyonu, $P(X = x, Y = y) = P(x, y)$ olduğuna göre,

$$P(x) = \sum_{y \epsilon D_Y} P(x, y)$$
$$P(y) = \sum_{x \epsilon D_X} P(x, y)$$

olasılıklarına sırasıyla $X\ ve\ Y$'nin marjinal olasılık fonksiyonları adı verilir.

Örnek1: Düzgün bir paranın üç kez atılışını deneyinde örnek uzay,

$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$

X rasgele değişkeni üç atışta gelen tura sayısını, Y rasgele değişkeni ise ilk iki atışta gelen tura sayısını göstersin. Bu rasgele vektörün aldığı değerlerin kümesi,

$D_{(X,Y)} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2)\}$

dır. $X\ ve\ Y$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık tablosu,

x \ y	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	2/8	0	3/8
2	0	2/8	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$P(Y = y)$	2/8	4/8	2/8	1

X'in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=\sum_{y\epsilon D_Y}P(x,y)=\sum_{y=0}^{2}P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8} & , \; x=0\\ \frac{3}{8} & , \; x=1\\ \frac{3}{8} & , \; x=2\\ \frac{1}{8} & , x=3\end{cases}$$

ve olasılık tablosu,

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Y'in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$P(Y=y)=\sum_{x\epsilon D_X}P(x,y)=\sum_{x=0}^{3}P(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{8} & , \; y=0\\ \frac{4}{8} & , \; y=1\\ \frac{2}{8} & , \; x=2\end{cases}$$

ve olasılık tablosu,

y	0	1	2
$P(Y=y)$	1/4	1/2	1/4

X rasgele değişkeni düzgün bir paranın üç kez atılışında gelen turaların sayısı olmak üzere, $P(X = 1)$ olasılığını, $f_{X,Y}$ veya f_X fonksiyonu yardımıyla hesaplayınız.

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 1/8 + 2/8 = 3/8$$

veya marjinal olasılık fonksiyonu ile hesaplanır.

$$P(X_1 = 1) = 3/8$$

Üç atışta gelen tura sayısının ilk iki atışta gelen tura sayısına eşit olması olasılığı,

$$P(X = Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2)$$
$$= 1/8 + 2/8 + 1/8 = 1/2$$

şeklinde hesaplanır.

1.3.Koşullu Olasılık Fonksiyonu

Aynı örnek uzayda tanımlı *X ve Y* kesikli rasgele değişkenler ise *Y*=*y* verilmişken *X*'in koşullu olasılık fonksiyonu,

$$P(x|y) = \frac{P(x = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

X=*x* verilmişken *Y*'in koşullu olasılık fonksiyonu,

$$P(y|x) = \frac{P(x = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

1.4.Bağımsız Rasgele Değişkenler

X ve *Y* aynı örnek uzayda tanımlı kesikli rasgele değişkenleri arasında,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

ilişkisi varsa, bu iki rasgele değişken bağımsızdır.

1.5.Beklenen Değer ve Varyans

X ve Y iki rasgele değişken olsun.

i) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

$X\ ve\ Y$ bağımsız iki rasgele değişken ise

iii) $E(XY) = E(X).E(Y)$

iv) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Kov(X, Y)$

v) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Kov(X,Y)$

1.6.Koşullu Beklenen Değer

Y=*y* verilmişken *X*'in koşullu beklenen değeri,

$$E(X|Y=y) = \sum_x x.P(x|y)$$

X=*x* verilmişken *Y*'in koşullu beklenen değeri,

$$E(Y|X=x) = \sum_y y.P(y|x)$$

1.7.Koşullu Varyans

Y=*y* verilmişken *X*'in koşullu varyansı,

$$Var(X|Y=y) = \sum_x [x - E(X|y)]^2 . P(x|y)$$

biçiminde bulunur. Yani, $Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2$ şeklinde hesaplanır.

2. **Sürekli Rasgele Değişkenler**

2.1.Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X ve Y sürekli rasgele değişkenler olsun.

a) $f(x,y) \geq 0$ her *x ve y* için
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

Koşullarını sağlayan $f(x,y)$ fonksiyonunsa, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu adı verilir.

2.2.Marjinal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X ve Y sürekli rasgele değişkenler olup, *f(x,y)* bir ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

X rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

Y rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

2.3.Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Y=y verilmişken X'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \,, f(y) > 0$$

X=x verilmişken Y'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \,, f(x) > 0$$

2.4.Bağımsız Sürekli Rasgele Değişkenler

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri arasında,

$$f(x,y) = f(x).f(y)$$

ilişkisi varsa, bu iki rasgele değişken bağımsızdır.

2.5.Koşullu Beklenen Değer

Y=y verilmişken X'in koşullu beklenen değeri,

$$E(X|Y=y) = \int x.f(x|y)dx$$

X=x verilmişken Y'in koşullu beklenen değeri,

$$E(Y|X=x) = \int y.f(y|x)dy$$

2.6.Koşullu Varyans

Y=y verilmişken X'in koşullu beklenen değeri,

$$Var(X|Y=y) = \int [x - E(X|y)]^2 f(x|y)dx$$

Biçiminde bulunur. Yani, $Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2$ şeklinde hesaplanır.

Örnek1. *X ve Y* rasgele değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y) = \frac{1}{21}(2x - y) \qquad\qquad x = 1,2,3\,; y = 0,1,$$

a) $f(x,y)$ bir ortak olasılık fonksiyonu mudur?

b) $f(x)$ ve $f(y)$ marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

c) $P(X \geq 2|Y = 0)$ olasılığını hesaplayınız.

d) $P(X \leq 2, Y = 2)$ olasılığını hesaplayınız.

e) $P(X > Y)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm1:

a) $P(0,1) = \frac{1}{21}(2.1 - 0) = \frac{2}{21} > 0$

$$P(1,1) = \frac{1}{21}(2.1 - 1) = \frac{1}{21} > 0$$

$$P(2,0) = \frac{1}{21}(2.2 - 0) = \frac{4}{21} > 0$$

$$P(2,1) = \frac{1}{21}(2.2 - 1) = \frac{3}{21} > 0$$

$$P(3,0) = \frac{1}{21}(2.3 - 0) = \frac{6}{21} > 0$$

$$P(3,1) = \frac{1}{21}(2.3 - 1) = \frac{5}{21} > 0$$

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=0}^{1} P(x,y) = P(1,0) + P(1,1) + P(2,0) + P(2,1) + P(3,0) + P(3,1)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = 1$$

Her iki koşul sağlandığı için fonksiyon bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) $P(x) = \sum_{y=0}^{1} P(x,y) = \frac{1}{21}\big((2x - 0) + (2x - 1)\big) = \frac{1}{21}(4x - 1)$

$$P(y) = \sum_{x=1}^{3} P(x,y) = \frac{1}{21}\big((2 - y) + (4 - y) + (6 - y)\big) = \frac{1}{21}(12 - 3y)$$

c) $P(X \geq 2|Y = 0) = \frac{P(X=2,Y=0)+(X=3,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{10/21}{12/21} = \frac{5}{6}$

d) $P(X \leq 2, Y = 2) = 0$

e) $P(X > Y) = P(1,0) + P(2,0) + P(2,1) + P(3,0) + P(3,1)$

$$= \frac{1}{21}(2 + 4 + 3 + 6 + 5) = \frac{20}{21}$$