Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi

Markov Eşitsizliği : X negatif değerler almayan bir rasgele değişken olmak üzere, her $c > 0$ için,

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}$$

şeklinde tanımlanır.

Chebyshev Eşitsizliği: Markov eşitsizliğinin bir sonucu olan Chepyshev eşitsizliği genellikle olasılıklar için bir alt veya üst sınır belirlemek için kullanılır.

Chepyshev eşitsizliği,

$$P(|X - \mu_x| > k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$veya$$

$$P(|X - \mu_x| < k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

olmak üzere, rasgele değişkenin kendi ortalaması komşuluğunda bulunması olasılığı için,

$$P(\mu_x - k\sigma_x < X < \mu_x + k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

gibi bir sınır değer belirlemektedir.

Büyük Sayılar Kanunu: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ bağımsız rasgele değişkenler ve $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $i = 1,2, \dots, n$ olsun. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$'lerin ortalaması,

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

olmak üzere, $E(\bar{X}_n) = \mu$ ve $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ olup, Chebyshev eşitsizliğinden,

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \mu_{\bar{X}_n}\right| < k\sigma_{\bar{X}_n}\right) = P\left(|\bar{X}_n - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

ve $k = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$, $\varepsilon = k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0$ için

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2}$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2}\right)$$

ve olasılığın 1'den büyük olmayacağı için,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

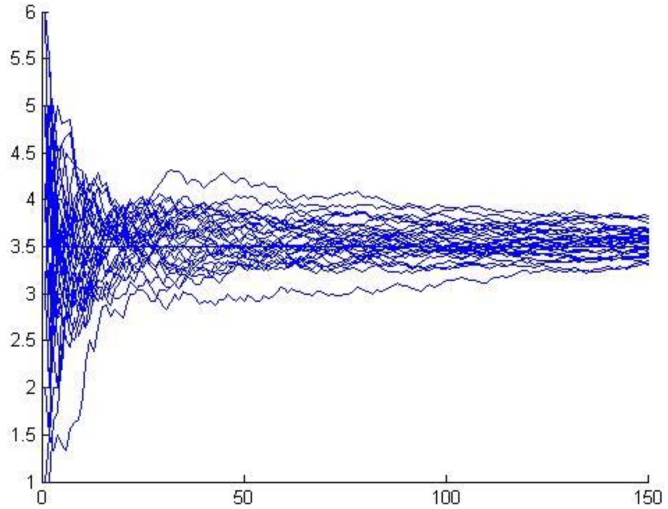
elde edilir. Bu durum Zayıf Büyük Sayılar Kanunu olarak bilinmektedir.

Zayıf Büyük Sayılar Kanunu: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ bağımsız ve aynı μ ortalamalı $\sigma^2 < \infty$ varyanslı rasgele değişkenler ise $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu$ dır.

Örnek: Düzgün bir tavla zarının ard arda atılışında gelen nokta sayıları $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ rasgele değişkenleri bağımsız ve 3.5 ortalamalı, 35/12 varyanslı olsun. Bu tavla zarının 150 kez atılsın.

Zayıf Büyük Sayılar Kanuna göre, deney sayısı n arttıkça, $\bar{X}_n$ değerleri $\mu = 3.5$ sayısına yaklaşmaktadır.
Matlab'da bu deneyi gösterelim.

```
hold on;
for i=1:30
plot((1:150),cumsum(fix(unifrnd(1,7,1,150)))./(1:150))
end
plot([0 150],[3.5,3.5])
```



Merkezi Limit Teoremi: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$. bağımsız ve aynı µ ortalamalı $\sigma^2 < \infty$ varyanslı rasgele değişkenler olsun. Merkezi Limit Teoremi,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightarrow^D \ N(0,1)$$

veya

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} \rightarrow^D \ N(0,1)$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek: Düzgün bir paranın ard arda atılışında gelen tura sayıları $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ rasgele değişkenleri (bağımsız ve $X_i \sim b\left(1, p = \frac{1}{2}\right), i = 1,2,3, \ldots$) olmak üzere, 100 atışta gelen toplam tura sayısının 50 olması olasılığını Merkezi Limit Teoremi kullanarak hesaplayınız.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 50\right) = P(50 - 0.5 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 50 + 0.5)$$

$$= P\left(\frac{49.5 - 100\frac{1}{2}}{\sqrt{100\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}\right) \leq Z \leq \left(\frac{50.5 - 100\frac{1}{2}}{\sqrt{100\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= P(-0.1 \leq Z \leq 0.1)$$

$$= normcdf(0.1,0,1) - normcdf(-0.1,0,1) = 0.079656$$