Simpleks Çözüm Yöntemi

SİMPLEKS METODUNA GİRİŞ

- Simpleks metodu bir algoritmadır.
- Optimal çözüm elde edilinceye kadar sistematik bir prosedürün tekrarlanmasından oluşan bir süreçtir.
- Bu prosedürün uygulandığı her safhaya bir iterasyon (tekrar) denir.
- Her defasında elde edilen çözüm optimallik testinden geçirilerek optimal olup olmadığı incelenir. Optimal çözüm bulunduğunda süreç sona erer.

SİMPLEKS Algoritması – Akış

Başlangıç adımı ⇒ Başlangıç çözümü / tablosunu oluştur.

⇓

İterasyon (tekrar) adımı ⇒ Bir iterasyon uygula.

⇓

Optimallik testi (Bulunan çözüm optimal mi?)

⇓ Hayır (İterasyon adımına dön)

⇓ Evet ⇒ Dur.

Daha ayrıntılı akış şeması Kitap syf. 167'dedir.

Maksimizasyon Durumu: Kunduracı Örneği

Bir kunduracı, üretimi A ve B gibi iki farklı makinada gerçekleşen X ve Y tipi iki tür çizme üretmektedir. Bir çift X tipi çizme A makinasında 1 ve B makinasında 3 saatlik makine işi gerektiririrken bir çift Y tipi çizme de A makinasında 4 ve B makinasında ise 5 saatlik makine işi gerektirmektedir.

Kunduracının sahip olduğu haftalık makine iş zamanı A makinasında 38 ve B makinasında ise 86 saattir. Bir çift X tipi çizme 1000 lira ve bir çift Y tipi de 2000 lira kârla satıldığına göre kârını maksimize etmek için kunduracı haftada kaç çift X ve Y tipi çizme üretmelidir.

	Makineler		
Çizmeler	A	B	Kâr
X Tipi (X1)	1	3	1000 lira
Y Tipi (X2)	4	5	2000 lira
Toplam Zaman:	38	86	

MODEL

$Z_{max} = 1000X_1 + 2000X_2$

Kısıtlar:

$1X_1 + 4X_2 \leq 38$ (A makinası kısıtı)

$3X_1 + 5X_2 \leq 86$ (B makinası kısıtı)

$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$ (Negatif olmama)

1. Aşama: Eşitsizlikleri Eşitlik Biçimine Dönüştürmek

<u>1.Kısıt (A makinası kısıtı)</u>

$1X_1 + 4X_2 \leq 38$

$0 \quad \ldots \quad 38 \leq 38$

➔ *Eşitliğe çevirmek için sol tarafa öyle bir değişken eklemeliyiz ki değeri aradaki fark kadar olsun* ➔ $1X_1 + 4X_2 + 1X_3 = 38$

<u>2. Kısıt (B makinası kısıtı)</u>

$3X_1 + 5X_2 \leq 86$

$3X_1 + 5X_2 + 1X_4 = 86$

BOŞ DEĞİŞKEN (Boş Kaynağı Temsil eder)

2. Aşama: İlk Temel Çözümü Belirlemek

Bu aşamada, **doğrusal bir denklem sistemine dönüşen problemin ilk temel çözümü bulunur.**

$$1X_1 + 4X_2 + 1X_3 + 0X_4 = 38$$
$$3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 1X_4 = 86$$

4 bilinmeyenli (n=4)

2 eşitlikli (m=2)

Bu uyumlu sistemde Rank (r) = 2 ve r < n olduğundan **bu sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.**

(X_3 ve X_4 değerlerine bağlı olarak)

İlk Temel Çözümü Belirlemek

- Bu sonsuz sayıdaki çözüm içinden **bizim aradığımız, negatif olmama kısıtı nedeniyle $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ olan değerler arasından $Z_{max} = 1000X_1 + 2000X_2$ amaç fonksiyonunu maksimum yapan değerlerdir.**

- Bu optimali aramak için **bir temel hareket noktası** yani **temel çözüm** bulunmalıdır.

- **(n - m) sayıda değişken sıfıra eşitlenirse** geriye **kalan n = m biçimindeki karesel - doğrusal denklem sistemini** Gauss – Jordan veya Ters Matris yöntemleri ile **çözebiliriz**.

- **Bu** çözüm sonucu bulunacak **değerler ile (n-m) farkı kadar sıfır değerini verdiğimiz değişken değerleri "temel" bir çözümü oluşturur.**

- Herhangi bir n bilinmeyenli, m eşitlikli n>m doğrusal denklem sisteminde n! / m! (n-m)! kadar temel çözüm vardır.

- Bizim **örneğimizde temel çözümler 4!/ (4-2)! 2! = 6 tanedir. (Değişkenlerin ikili kombinasyonlarının sıfıra eşitlendiği çözümler) - Kitap syf. 148**

İlk Temel Çözümü Belirlemek

- Ancak, biz **öyle bir temel çözüm almalıyız ki hiçbir değişken değeri negatif olmasın.**

- Bu **koşulu garantileyen temel çözüm gerçek karar değişkenlerinin sıfıra eşitlendiği çözümdür.**

- **Böylece katsayıları 1 olan boş değişkenler doğrudan sağ taraf kaynak miktarı değerlerini alırlar. Kaynak** hiçbir zaman **negatif olmayacağından boş değişkenler de negatif değer almayacaklardır.**

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 0$$

$$1(0) + 4(0) + 1X_3 \qquad\qquad = 38$$
$$3(0) + 5(0) \qquad\qquad +1X_4 = 86$$

$$X_3 = 38$$
$$X_4 = 86$$

Eğer eşitsizlikler $\geq$ biçiminde olursa eşitsizliklerin sol tarafını sağ tarafa eşitlemek için **sol taraftan** bu kez **bir değişkenin çıkarılması** gerekir.

Örneğin;

$-1X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 1$

biçimindeki bir eşitsizliği

$-1X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_4 = 1$

biçiminde eşitlik olarak yazabiliriz.

Eğer $-1X_1 + 2X_2 + 2X_3$ değeri 1'e eşitse $X_4 = 0$ değerini alır. Eğer 2'ye eşitse $X_4 = 1$ değeri alır… Eşitlik her durumda sağlanır.

İlk Temel Çözümü Belirlemek

Eğer boş değişken katsayıları -1 ise (kısıtın ≥ olduğu durumlarda) ya da boş değişken yok, yani 0 ise (kısıtlığın = olduğu durumlarda) yukarıdaki şekilde elde edilen temel çözüm değerleri negatif çıkar (çıkabilir).

Böylece KURAL OLARAK önce Karar Değişkenleri, sonra Negatif Boş Değişkenler sıfıra eşitlenerek temel çözüm bulunur.

Bu durumlarda **bu türdeki kısıt denklemlerine +1 katsayılı "yapay" değişkenler eklenir.** Sonra bir şekilde bu yapay değişkenlerin son çözümde yer almaması sağlanır!

ÖRNEK:

$$1X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 5$$

$$2X_1 - X_2 - 2X_3 = 2$$

$$-1X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 1$$

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0$$

➔

İlk Temel Çözümü Belirlemek

$$1X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 5$$

$$2X_1 - X_2 - 2X_3 = 2$$

$$-1X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_5 = 1$$

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0 \quad X_5 \geq 0$$

İlk Temel Çözümü Belirlemek: Örnek

- (n-m) karar değişkenini Sıfıra Eşitlersek; $X_1 = X_2 = 0$

$$1(0) + 2(0) - X_3 + X_4 = 5$$
$$2(0) - (0) - 2X_3 = 2$$
$$-1(0) + 2(0) + 2X_3 - X_5 = 1$$

Sonuç;

$X_3 = -1$; $X_4 = 4$; $X_5 = -3$

(Not: Her eşitlikte bir değişken kalmasını istiyoruz. Kitapta s.113 2. eşitlikte X_3 ün önünde +2 katsayısı olan örnek de incelenmeli)

- Ancak, tüm karar değişkenlerini sıfıra eşitlesek de yani $X_3 = 0$ kabul etsek, ikinci eşitlikte değişken kalmaz; $0 = 2$ olur ve üçüncü eşitlikte $X_5 = -1$ çıkar.

- O zaman yukarıda verilen kuralın işlemesi için n sayısı artırılmalı yani **yapay değişkenler** uygun yerlere **eklenmeli**.

İlk Temel Çözümü Belirlemek: Örnek

$$
\begin{aligned}
1X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 \qquad\qquad &= 5 \\
2X_1 - X_2 - 2X_3 \qquad + X_6 \quad &= 2 \\
-1X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_5 \qquad + X_7 &= 1
\end{aligned}
$$

Karar Değişkenleri

Boş Değişkenler

Yapay Değişkenler

n=7 (arttı!) m=3 → n-m = 4 değişken sıfıra eşitlenir

İlk Temel Çözümü Belirlemek: Örnek

1.Karar Değişkenleri;

$$X_1=X_2=X_3 = 0$$

2.Eksi İşaretli Boş Değişken;

$$X_5 = 0$$

İlk Temel Çözüm;

$$X_4=5$$

$$X_6=2$$

$$X_7=1$$

Olarak bulunur ve uygun bir temel çözümdür!

3. Aşama: Başlangıç Simplex Tablosunun Hazırlanması

			Değişkenlerin Amaç Fonksiyonuna katkıları (C_j katsayıları) C_1 C_2 .... C_n	
Çözüme Giren Değişkenin Katkısı (C_i)	Çözüme Giren Değişken (X_i)	Çözüme Giren Değişkenin Miktarı (b_i)	Değişkenler (X_j) X_1 X_2 .... X_n	Çözüme Girecek Değişkenin Miktarı ($\acute{\varnothing}_i$)
C_1 C_1 . C_m	X_1 X_2 . X_m	b_1 b_2 . b_m	Değişken Katsayıları ($a_{i\,j}$)	$\acute{\varnothing}_1$ $\acute{\varnothing}_2$. $\acute{\varnothing}_m$
Amaç Fonksiyonu Değeri (Z_j)		Z	Z_1 Z_2 .... Z_n	
Amaç Fonksiyonuna Potansiyel Katkı ($C_j – Z_j$)			$(C_1–Z_1)$ $(C_2–Z_2)$....$(C_n–Z_n)$	

ÖRNEK MODELİN BAŞLANGIÇ TABLOSU

ORJİNAL MODEL:

$$Z_{max} = 1000X_1 + 2000X_2$$

Kısıtlar:

$$1X_1 + 4X_2 \leq 38 \text{ (A makinası kısıtı)}$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 86 \text{ (B makinası kısıtı)}$$

MODELİN EŞİTLİK HALİNDE YAZILMIŞ HALİ:

$$Z_{max} = 1000X_1 + 2000X_2 + \mathbf{0X_3} + \mathbf{0X_4}$$

$$1X_1 + 4X_2 + \mathbf{1X_3} = 38$$

$$3X_1 + 5X_2 + \mathbf{1X_4} = 86$$

(Not: X_3 ve X_4 boş değişkenlerdir. Amaç fonksiyonuna katkıları sıfırdır. Kullanılmayan kaynakları temsil ederler)

İLK TEMEL ÇÖZÜM:

$$X_1 = 0 \ ; X_2 = 0 \ ; X_3 = 38 \ ; X_4 = 86$$

İlk temel çözümü tabloya geçirelim ve optimali arayalım ➔

$Z_{max} = 1000X_1 + 2000X_2 + 0X_3 + 0X_4$

$1X_1 + 4X_2 + 1X_3 = 38$
$3X_1 + 5X_2 + 1X_4 = 86$

			1000	2000	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4
Çözüm		Miktar				
0	X_3	38	1	4	1	0
0	X_4	86	3	5	0	1
Z_J		0	0	0	0	0
C_J-Z_J			1000	2000	0	0

38/4 =9,5

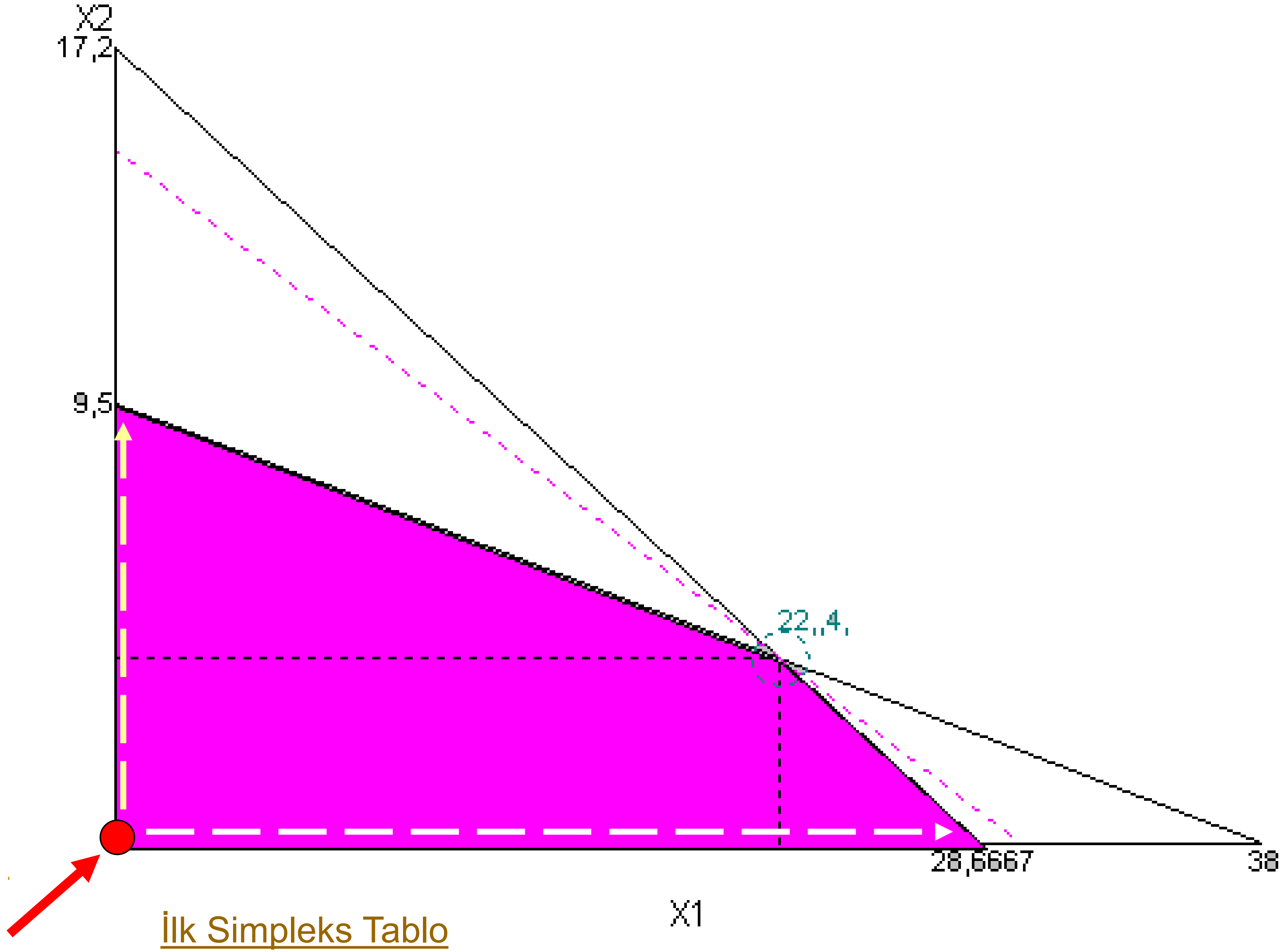
86/5 =17,2

Amaç Fonk.na Yapılan Katkılar

Potansiyel Birim Katkılar

Grafik Gösterim

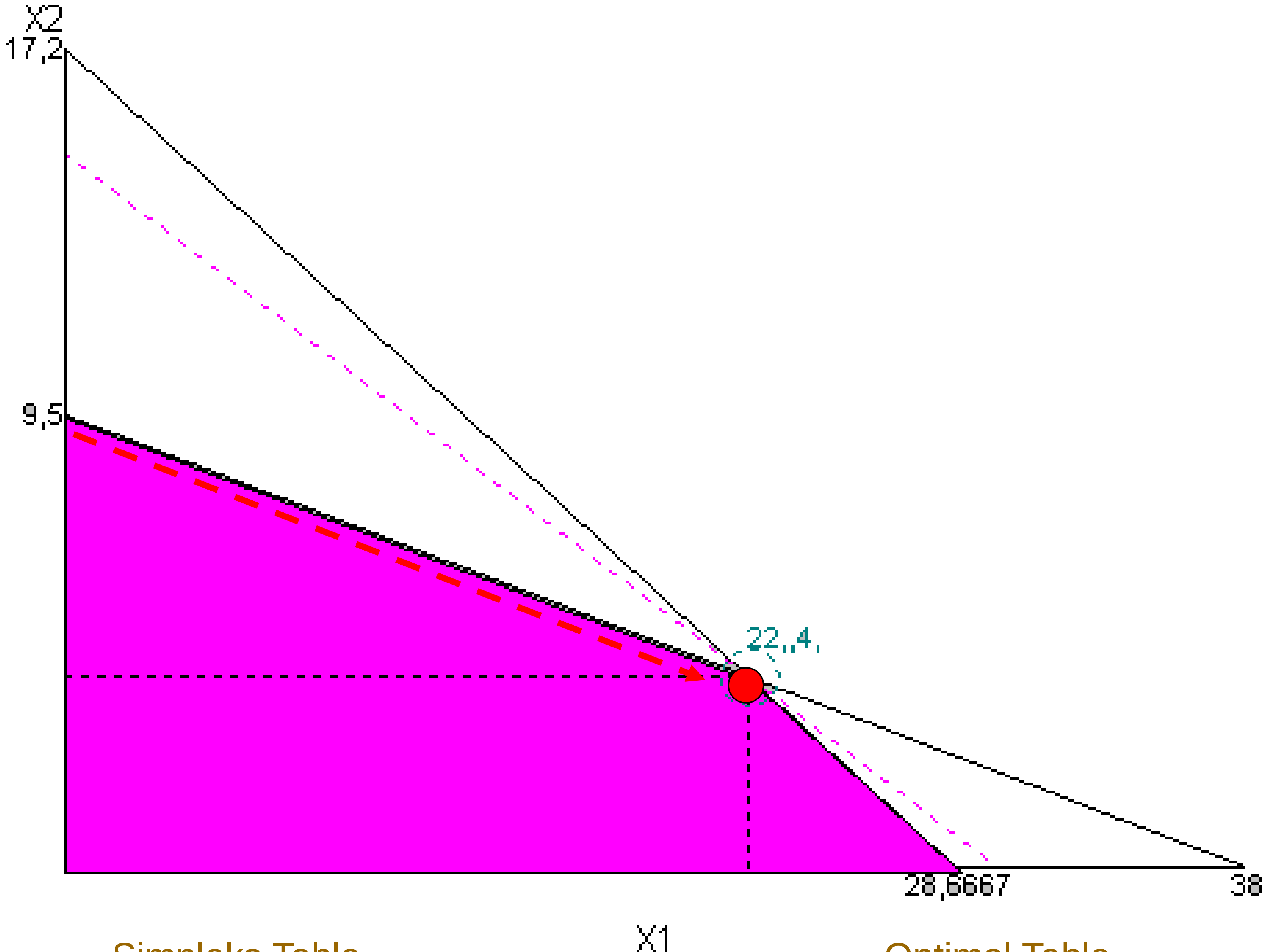
Tablo Değişimi



İlk Simpleks Tablo

		1000	2000	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	
2000 X_2	9,5	0,25	1	0,25	0	9,5/0,25 = 38
0 X_4	38,5	1,75	0	-1,25	1	38,5/1,75 = 22
Z_J	19000	500	2000	500	0	
C_J-Z_J		500	0	-500	0	

Grafik Gösterim



Simpleks Tablo

Optimal Tablo

		1000	2000	0	0
		X_1	X_2	X_3	X_4
2000 X_2	4	0	1	0,43	-0,14
1000 X_1	22	1	0	-0,71	0,57
Z_J	30000	1000	2000	143	286
C_J-Z_J		0	0	-143	-286

Potansiyel Birim Katkılar ≤ 0

OPTİMAL ÇÖZÜM:

X1 = 22 ; X2 = 4 ;

X3 =0 ; X4 =0

Grafik Gösterim

Maksimizasyon Durumu için Simpleks Çözümü Özet Tablo Kitabınızın syf. 145-166 arasında yer almaktadır!

Minimizasyon Durumu:
Oba Yem Fabrikası Örneği

Oba–Yem fabrikası içerisinde iki farklı madde bulunan bir hayvan yemi karışımı için bir müşterisinden 1000 kilogramlık bir sipariş almıştır.

Ancak müşteri fabrikadan, yapılacak yem karışımı içerisinde birinci maddeden 400 kg’dan fazla ve ikinci maddeden ise 300 kg’den az olmamasını istemektedir.

Birinci maddenin 1 kilogramının maliyeti 40 ve ikincisinin de 50 lira olduğuna göre, istenilen yem karışımının maliyetini minimum yapmak için Oba–Yem fabrikası her maddeden kaç kilogram kullanmalıdır?

MODEL

$Z_{min} = 40X_1 + 50X_2$

Kısıtlılıklar:

$X_1 \leq 400$ (Birinci madde)

$X_2 \geq 300$ (İkinci madde)

$X_1 + X_2 = 1000$ (Sipariş miktarı)

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$ (Negatif olmama)

Eşitsizlikleri Eşitliğe Dönüştürmek

$$Z_{min} = 40X_1 + 50X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MX_5 + MX_6$$

$$X_1 + X_3 = 400$$

$$X_2 - X_4 + X_6 = 300$$

$$X_1 + X_2 + X_5 = 1000$$

Not: M katsayıları yapay değişkenlerin optimal çözümde yer almalarını engellemek yani çözümü terk etmelerini sağlamak için konulmuştur.

Çünkü ***amacı minimum yapmak isteyen algoritma maliyeti büyük miktarda artıran değişkenleri öncelikle çözümden çıkarır.***

M pozitif değerli ve ***diğer katsayılara göre çok büyük bir katsayı örneğin M = 1000 gibi düşünülebilir.***

İlk Temel Çözüm

(n-m) = (6-3)=3 değişken sıfıra eşitlenecek

1.Karar Değişkenlerini Sıfıra Eşitle

$$X_1 = X_2 = 0$$

2. Negatif İşaretli Boş Değişkenleri Sıfıra Eşitle

$$X_4 = 0$$

Temel Çözüm;

$$X_3 = 400$$
$$X_6 = 300$$
$$X_5 = 1000$$

İlk temel çözümü tabloya geçirelim ve optimali arayalım ➔

Başlangıç Tablosunun Oluşturulması

C_i	Çözüm	C_j / Miktar	40 / X_1	50 / X_2	0 / X_3	0 / X_4	M / X_5	M / X_6	θ
0	X_3	400	1	0	1	0	0	0	400/0 = Belirsiz
M	X_6	300	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	300/1 = 300
M	X_5	1000	1	1	0	0	1	0	1000/1 = 1000
	Z_j	1300M	M	2M	0	-M	M	M	
	$C_j - Z_j$		(40-M)	(50-2M)	0	M	0	0	

Not: M = 1000 gibi düşünülebilir.

Optimal Çözümün Aranması: İterasyon 1

C_i	Çözüm	Miktar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ	
		C_j	40	50	0	0	M	M		
0	X_3	400	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	400/1=	400
50	X_2	300	0	1	0	-1	0	1	300/0=	Belirsiz
M	X_5	700	1	0	0	1	1	-1	700/1=	700
	Z_j	(15000+700M	M	50	0	(-50+M)	M	(50-M)		
	$C_j - Z_j$		(40-M)	0	0	(50-M)	0	(-50 + M)		

İterasyon 2

C_i	Çözüm	Miktar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ	
	C_j		40	50	0	0	M	M		
40	X_1	400	1	0	1	0	0	0	400/0=	Belirsiz
50	X_2	300	0	1	0	-1	0	1	300/-1=	Negatif
M	X_5	300	1	0	0	$\boxed{1}$	1	-1	300/1=	300
	Z_j	(3100+300M)	40	50	(40-M)	(-50+M)	M	(50-M)		
	$C_j - Z_j$		0	0	(-40+M)	(50-M)	0	(-50+2M)		

İterasyon 3: Optimal Tablo

		C_j	40	50	0	0	M	M
C_i	Çözüm	Miktar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
40	X_1	400	1	0	1	0	0	0
50	X_2	600	0	1	-1	0	1	0
0	X_4	300	0	0	-1	1	1	-1
	Z_j	46000	40	50	-10	0	50	0
	$C_j - Z_j$		0	0	10	0	(M-50)	M

Potansiyel Birim Katkılar ≥ 0

OPTİMAL ÇÖZÜM:

X1 = 400 ; X2 = 600

X4 = 300