KONU 3: ÇOK AMAÇLI KARAR MODELLERİNİN YAPISI

Bir ÇAKV modelinin matematiksel yapısı

$$
\begin{aligned}
&\max/\min\ Z_1(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_1\mathbf{X} = f_1(\mathbf{X}) \\
&\max/\min\ Z_2(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_2\mathbf{X} = f_2(\mathbf{X}) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\max/\min\ Z_l(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_l\mathbf{X} = f_l(\mathbf{X}) \\
&\qquad g_i(\mathbf{X}) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \mathbf{X} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada, l tane amaç fonksiyonu ve m tane kısıt fonksiyonu söz konusudur. $\mathbf{X}$, problemin karar değişkeni vektörüdür.

Çok amaçlı karar modellerinde temel yapı, nitelikleri dikkate alınarak uygun çözüm alanı içerisinde karar vericiyi en iyi tatmin edecek amaç değerlerini saptamak üzere kurulmuştur. Burada, üç tip temel yaklaşım ile sözü edilen uzlaşmaya varılmaya çalışılır. Bu yaklaşımlar aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

i. Karar vericinin ve modelin özelliklerine uygun bir fayda fonksiyonu tanımlamak ve bunu maksimize etmek.

$$
\begin{aligned}
&\max\ f(\mathbf{X}) = U(Z_1, Z_2, \ldots, Z_l) \\
&\qquad f_k(\mathbf{X}) = Z_k \quad , \quad 1 < k < l \\
&\qquad g_i(\mathbf{X}) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \mathbf{X} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Burada, U modelin fayda fonksiyonudur. Bu modelin amaç fonksiyonu ağırlıklandırılarak,

$$
\begin{aligned}
&\max\ f(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{l} w_k Z_k \\
&\qquad g_i(\mathbf{X}) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \mathbf{X} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

biçimine dönüşür. $\sum_{k=1}^{l} w_k = 1$ dir.

ii. Karar vericinin ve modelin özelliklerine uygun olarak amaçlardan birini optimize etmek. Sonrasında bu optimizasyonu bozmayacak biçimde ikinci amaç için olabildiğince iyi değeri elde etmeye çalışmak. Üçüncü amaç için de her iki amacın mevcut değerini bozmayan olabildiğince iyi değeri elde etmeye çalışmak ve benzer amaçlar için de benzer işlem sürecini yürütmek.

$$\begin{aligned} &\max \; Z = f_p(\mathbf{X}) \\ &\quad g_i(\mathbf{X}) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &\quad f_l(\mathbf{X}) \ge a_l \quad , \quad l = 1,2,\ldots,k \;\; , \; l \ne p \end{aligned}$$

a_l , *l*. amaca ait belirlenmiş değerdir.

iii. Karar vericinin ve modelin özelliklerine uygun bir ceza fonksiyonu tanımlayarak bu fonksiyonu minimize etmek.

$$\begin{aligned} &\max \; f(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{l} w_k d_k \\ &\quad g_i(\mathbf{X}) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &\quad \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

d_k , *k*. amacın optimal değeri ile diğer baskın çözüm değeri arasındaki uzaklık ölçüsüdür.

$d_k = f_k(\mathbf{X}^*) - f(\mathbf{X})$ biçiminde tanımlıdır.

Karar Vericiden İstenen Bilgiye Göre Çok Amaçlı Karar Verme Yöntemleri

i. Tercih bilgisinin kullanılmadığı yöntemler (No-preference method)

Amaçların önemine ilişkin herhangi bir bilgi kullanılmaz, karar vericinin görüşleri dikkate alınmaz.

(Mutlak Ölçüt Yöntemi-Global Criterian Method)

ii. Önsel tercih bilgisinin kullanıldığı yöntemler (A priori methods)

Karar verici çözüm sürecine başlamadan önce görüşlerini, önerilerini ve beklentilerini belirler. Amaçların tercihi için önsel bilgiye gereksinim vardır.

(Hedef Programlama-Goal Programming)

iii. Etkileşimli yöntemler (Intereactive methods)

Karar vericiden karar aşamasında ardışık olarak bilgi isteyen yöntemlerdir.

(STEM Yöntemi)

iv. Sonsal tercih bilgisinin kullanıldığı yöntemler (Posteriori methods)

Karar vericiden bilgiyi sonradan isteyen, her bir amaç için tercih bilgisinin kullanıldığı yöntemlerdir.

(Ağırlıklandırılmış Metrik Yöntemi-Weighted Metric Method)

Çok Amaçlı Optimizasyonda Temel Kavramlar

İdeal çözüm: Çok amaçlı karar modellerinde, $f\left(\mathbf{X}^*\right)$ gibi bir optimizasyondan ancak modelin her bir amacı için ayrı ayrı söz edilebilir. Bu amaçlar, genellikle birbiri ile çelişir nitelikte olduğu için aynı anda modelin tümünü kapsayan bir optimizasyona ideal çözüm kavramı ile ulaşılır. Matematiksel olarak, her bir amaç optimumdayken tümünün kesişim noktasında oluşur. Bu nokta, genel olarak uygun çözüm alanının dışında kalır. Ayrıca modeldeki amaç sayısı arttıkça böyle bir kesişim noktası bulmak zorlaşır.

Uygun çözüm alanı: Karar vericinin kontrolü altında olan ve olmayan sorunlar sistemi kaynaklarına ve çevresel etkileşimlere ait amacı etkileyici kısıtların oluşturduğu alandır.

İdeal çözüm, olanaksız ve uygulanamaz bir çözüm niteliğine sahiptir. Bu durumda ÇAKV ile ilgili baskınlık, etkinlik ve uzlaşma gibi kavramlar söz konusudur. Karar vericinin modelden beklentileri ve istekleri de bu kavramlar üzerinde etkileyicidir.

Baskın çözüm: Baskınlık kavramı, klasik iktisat teorisinin temel taşlarından biri olan Pareto optimallik prensibi üzerine kurulmuştur. Bu yaklaşıma göre herhangi bir amaç değerinde artış sağlayan bir çözüm kompozisyonu, diğer amaçların en az birinde herhangi bir azalmaya neden olmuyorsa elde edilen çözüm, birinci çözüme baskındır denir.

$\mathbf{X}=\left[X_1\ X_2 \ldots X_n\right]$ ve $\mathbf{Y}=\left[Y_1\ Y_2 \ldots Y_n\right]$ olmak üzere, $X_i \geq Y_i$, $i=1,2,\ldots,n$ ve en az bir *i* için $X_i > Y_i$ sağlanırsa, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$'ye baskındır denir. Bu çözüm kümesine, **Pareto optimal çözüm** ya da **etkin çözüm kümesi** denir.

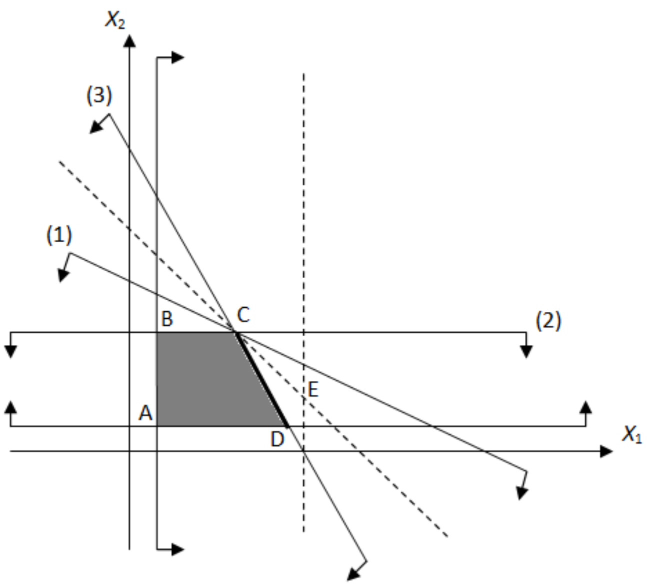
Uzlaşık çözüm: İdeal çözüm ile baskın çözümler kümesi arasındaki bir kavramdır. Genel olarak ideal çözüme en yakın baskın çözümler kümesini ifade eden uzlaşık çözüm, karar verici ile etkileşimlerin söz konusu olduğu yaklaşımlarda istek ve beklentiler doğrultusunda baskın çözümler kümesinin bir alt kümesine doğru da dağılabilir. Dolayısıyla, ideal çözüme yakınlık ya da ideal çözümden uzaklaşma bu istek ve beklentilerin etkisi altında tanımlanabilir. Etkileşimin olmadığı durumlarda ise bu tanımlama tamamen uygulanan algoritmik modelin yapısına bağımlıdır. Her uzlaşık çözüm aynı zamanda baskın çözümler kümesinin bir elemanıdır.

Örnek:

$$\max Z_1 = 3X_1 + 3X_2$$
$$\max Z_2 = X_1$$
$$4X_1 + 6X_2 \leq 48$$
$$4.5X_1 + 3X_2 \leq 36$$
$$3X_2 \geq 3$$
$$2X_1 \geq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

biçiminde tanımlı çok amaçlı modele ilişkin uzlaşık çözümü geometrik yöntem ile elde ediniz.

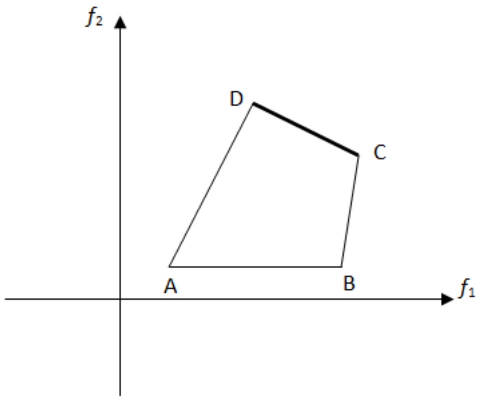
Çözüm:



Şekil 2. Karar uzayı

Noktalar	Max Z_1	Max Z_2	
A = (1, 1)	6	1	Basılgın
B = (1, 7.3)	24.99	1	Basılgın
C = (4.8, 4.8)	28.8*	4.8	Baskın
D = (7.3, 1)	24.9	7.3*	Baskın

Birinci amaç fonksiyonu için optimal nokta C noktası iken, ikinci amaç fonksiyonu için optimal nokta D olarak belirlenmiştir. Çok amaçlı anlamda, iki amacın çakıştırılması ve bütünleşik bir değerlendirmenin yapılması gerekir. İki amaç fonksiyonunun çakıştığı nokta ideal çözüm olacaktır. Buna göre, ideal çözüm E noktasında gerçekleşmektedir. Ancak, bu nokta uygun çözüm alanının dışındadır.



Şekil 1. Amaç uzayı

Problemin amaç uzayı, Şekil 2’deki gibidir. Şekil 2’ye bakıldığında, [CD] doğru parçası baskın kenar ya da etkin kenar özelliğine sahiptir. Buna göre uzlaşma, [CD] doğru parçası ile E noktası arasında olacaktır. Uzlaşık çözüm, E noktasına [CD] üzerindeki en yakın yüzey veya noktalar üzerinde bulunmaya çalışılır.