

KONU 11: ÇOK ÖLÇÜTLÜ KARAR VERME YÖNTEMLERİ – III

Analitik Hiyerarşi Süreci (Analytical Hierarchy Process - AHP)

Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP) ilk olarak 1968 yılında Myers ve Alpet tarafından ortaya konulmuş ve 1977 yılında Saaty tarafından karar verme problemlerinin çözümünde kullanılabilir bir yöntem olarak geliştirilmiştir. AHP, karar almada nicel ve nitel ölçütleri değerlendirebilen, grup veya bireyin tercihlerini, deneyimlerini, sezgilerini, bilgilerini, yargılarını ve düşüncelerini karar sürecine dahil edebilen, karmaşık problemlerin hiyerarşik bir yapı içinde ele alınarak çözülmesini sağlayan bir ÇÖKV yöntemidir. Karar verici hem objektif hem de subjektif düşüncelerini karar sürecine dahil edebilmektedir. Dolayısıyla bu durum, karar vericiye kendi karar verme mekanizmalarını tanıma olanağı sağlamaktadır.

AHP'de hiyerarşi en az üç seviyede teşkil edilir. Hiyerarşinin en üst seviyesinde amaç bulunur. Bir alt seviyede ana ölçütler, varsa ana ölçütlerin altında alt ölçütler yer alır. En alt basamakta ise karar seçenekleri bulunur. İkili karşılaştırmaların tutarlı olabilmesi için ölçütlerin sayısı doğru tespit edilmeli ve her bir ölçüt doğru tanımlanmalıdır. Ölçütler ortak özellikleri dikkate alınarak sınıflandırılmalıdır. AHP, çok sayıda ölçüt ile uygulanabilir. Grup kararlarının alınması için çok iyi bir yöntemdir. Duyarlılık analizi sayesinde sonucun esnekliğini analiz etmek mümkündür. Hiyerarşinin ve ikili karşılaştırma matrislerinin oluşturulması subjektif olduğundan dolayı, deneyimli ve konusunda uzman kişilere ihtiyaç vardır.

AHP yönteminin algoritmik adımları aşağıdaki biçimdedir.

Adım 1: Problem tanımlanır.

Karar için gerekli olan ölçütler belirlenerek, ölçüt öncelikleri tespit edilir.

Adım 2: Hiyerarşik yapı oluşturulur.

En üstte ulaşılması gereken temel hedef yer alır. Onun altında ise temel ölçütler ve alt ölçütler bulunur. Hiyerarşinin en altında ise alternatifler yer almaktadır. Hiyerarşinin aşama sayısı, problemin karmaşıklığına ve detay derecesine bağlıdır. Hiyerarşi oluşturulurken, aynı düzlemde yer alan seçeneklerin birbirlerinden tamamen bağımsız olduğu kabul edilir.

Adım 3: İkili karşılaştırmalar matrisi oluşturulur.

1 ile 9 arasında değerler alan bir önem derecesi ölçeği kullanılarak, önce temel ölçütler, varsa alt ölçütler ve son olarak tüm ölçütlerin dikkate alınarak ölçütlere göre karar seçeneklerinin karşılaştırıldığı matrisler oluşturulur. Karşılaştırma matrisleri köşegen elemanları 1 olan bir kare matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} = 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} = 1/a_{1n} & a_{n2} = 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

a_{ij} , i . ölçüt ile j . ölçütün ikili karşılaştırma değeri olup, a_{ji} değeri $1/a_{ij}$ den elde edilir. Bu özelliğe, karşılık olma özelliği denir. a_{ij} değeri, "Ölçüt i değeri bir başka ölçüt j ye göre ne oranda tercih edilmelidir?" sorusunun cevabıdır. Karar seçenekleri her bir ölçüte göre ayrı ayrı karşılaştırılır. Karar matrisleri, aşağıda Saaty tarafından önerilmiş olan 1-9 karşılaştırma ölçeği kullanılarak oluşturulur.

Tablo 1. Karşılaştırma Ölçeği

Önemi	Tanım	Açıklama
1	Eşit öneme sahip	Her iki seçenekte eşit değerde öneme sahiptir.
2	Zayıf ya da hafif	
3	Biraz önemli	Bir ölçüt diğerine göre biraz daha önemli sayılmıştır.
4	Makul artı	
5	Fazla önemli	Bir ölçüt diğerine göre çok daha önemli sayılmıştır.
6	Güçlü artı	
7	Çok fazla önemli	Ölçüt diğer ölçüte göre kesinlikle çok daha önemli sayılmıştır.
8	Çok çok güçlü	
9	Son derece önemli	Bir ölçütün diğerine göre son derece önemli olduğu çeşitli bilgilere dayandırılmıştır.

Adım 4: İkili karşılaştırma matrisleri normalize edilir.

Matristeki her eleman kendi sütun toplamına bölünerek, normalize edilir. Normalize edilmiş matrisin her bir sütun toplamı 1 olur.

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

eşitliği kullanılır.

Adım 5: Öncelik vektörü hesaplanır.

Normalize edilmiş matrisin her bir satır toplamı, matrisin boyutuna bölünerek ortalaması alınır. Bulunan bu değerler her bir ölçüt için hesaplanan önem ağırlıklarıdır. Bu ağırlıklar, öncelik vektörünü oluşturur.

$$w_i = \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n a'_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

eşitliği kullanılır. Böylece, ölçütlerin birbirlerine göre önem değerlerini gösteren yüzde önem dağılımları elde edilir.

Öncelikler vektörünün oluşturulması aşamasında dört farklı yol izlenebilir. Bunlar, En Genel Yöntem, Daha İyi Bir Yöntem, İyi Bir Yöntem, En İyi Yöntem başlıkları ile tanımlanabilir. Karşılaştırma matrisleri tutarlı olduğunda bu yöntemlerin dördü de aynı sonucu verecektir.

Adım 6: Tutarlılık oranı hesaplanır.

İkili karşılaştırmaların yapılması ve önceliklerinin belirlenmesinin ardından karşılaştırma matrislerinin tutarlılığının hesaplanır. İkili karşılaştırma yargısı sonucu oluşan bir A matrisinin tutarlı olup olmadığını belirleyebilmek için bir çok yöntemden bir tanesi olan "Tutarlılık İndeksi (Consistency Index-CI)" adı verilen katsayının hesaplanması gerekir. CI katsayısı

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (4)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada,

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j}{w_i} \right) \quad (5)$$

dır.

$$A \times W = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}=1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}=1/a_{1n} & a_{n2}=1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$d_i = \frac{x_i}{w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \quad (8)$$

Tutarlılığı değerlendirebilmek için “Rassal İndeks (Random Index-RI)” değerinin bilinmesi gerekir. n boyutlu karşılaştırma matrisleri için tanımlanan RI değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Karşılaştırma matrislerinin boyutlarına göre RI değerleri

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.53	1.56	1.57	1.59

CI ve RI değerleri belirlendikten sonra “Tutarlılık Oranı (Consistency Ratio- CR)” hesaplanır.

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (9)$$

Eşitlik (9) ile tanımlı CR ’nin 0.10’den küçük çıkması durumunda karşılaştırma matrisinin tutarlı olduğuna karar verilir.

Adım 7: Ölçütler için ikili karşılaştırma matrisi oluşturularak, karar seçeneklerinin öncelik vektörü hesaplanır. Bu öncelik vektörü, ölçütler için ağırlık vektörü olarak da tanımlanabilir.

Adım 8: Karar seçenekleri sıralanır.

Ölçütler için elde edilen öncelik vektörleri birleştirilerek, tüm öncelikler matrisi elde edilir. Tüm öncelikler matrisi ile karar seçeneklerinin öncelik vektörü çarpılıp toplanarak sonuç vektörü elde edilir. Bu vektörde en yüksek ağırlığa sahip olan karar seçeneği problemin çözümü için tercih edilmesi gereken karar seçeneği olarak belirlenir.

Örnek: Bir karar verme probleminde 3 karar seçeneği (K1, K2, K3) ve 4 değerlendirme ölçütü (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4) bulunmaktadır. Karar verici karar matrisini aşağıdaki gibi oluşturmuştur.

$$D = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 15 & 30 \\ 10 & 30 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 30 & 10 \end{bmatrix}$$

Değerlendirme ölçütlerine ilişkin ağırlıklar, $w_1 = 0.20$, $w_2 = 0.15$, $w_3 = 0.40$, $w_4 = 0.25$ biçiminde tanımlanmıştır. Burada, karar verici için maksimum getiriye sağlamak temel hedeftir. Buna göre, AHP yöntemini kullanarak, karar seçeneklerinin önem sırasını oluşturarak karar vericinin hangi seçeneği tercih etmesi gerektiğini belirleyiniz.

Çözüm:

Her bir ölçüte göre karar seçeneklerinin ikili karşılaştırma matrisleri ve öncelik vektörleri oluşturularak, tüm öncelik matrisi elde edilir.

Ö1	K1	K2	K3
K1	1	4	1/2
K2	1/4	1	1/5
K3	2	5	1

Ö1	K1	K2	K3
K1	1	4	1/2
K2	1/4	1	1/5
K3	2	5	1
Toplam	3.25	10	1.7

Ö1	K1	K2	K3
K1	0.3077	0.4	0.2941
K2	0.0769	0.1	0.1177
K3	0.654	0.5	0.5882

$$W_{\text{Ö1}} = \begin{bmatrix} 1.0018 / 3 \\ 0.2946 / 3 \\ 1.7036 / 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.10 \\ 0.57 \end{bmatrix}$$

Ölçüt 1'e göre, K1 %33, K2 %10 ve K3 %57 öneme sahiptir.

Ö2	K1	K2	K3
K1	1	1/3	3
K2	3	1	5
K3	1/3	1/5	1

Ö2	K1	K2	K3
K1	1	1/3	3
K2	3	1	5
K3	1/3	1/5	1
Toplam	4.33	1.53	9

Ö2	K1	K2	K3
K1	0.2309	0.2157	0.3333
K2	0.6929	0.6536	0.5556
K3	0.0762	0.1307	0.1111

$$W_{\text{Ö2}} = \begin{bmatrix} 0.7799/3 \\ 1.9021/3 \\ 0.3180/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.63 \\ 0.11 \end{bmatrix}$$

Ölçüt 2'ye göre, K1 %26, K2 %63 ve K3 %11 öneme sahiptir.

Ö3	K1	K2	K3
K1	1	1/2	1/4
K2	2	1	1/3
K3	4	3	1

Ö3	K1	K2	K3
K1	1	1/2	1/4
K2	2	1	1/3
K3	4	3	1
Toplam	7	4.5	1.58

Ö3	K1	K2	K3
K1	0.1429	0.1111	0.1582
K2	0.2857	0.2222	0.2089
K3	0.5714	0.6667	0.6329

$$W_{\text{Ö3}} = \begin{bmatrix} 0.4122 / 3 \\ 0.7168 / 3 \\ 1.8710 / 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.24 \\ 0.62 \end{bmatrix}$$

Ölçüt 3'e göre, K1 %14, K2 %24 ve K3 %62 öneme sahiptir.

Ö4	K1	K2	K3
K1	1	1	5
K2	1	1	5
K3	1/5	1/5	1

Ö4	K1	K2	K3
K1	1	1	5
K2	1	1	5
K3	1/5	1/5	1
Toplam	2.2	2.2	11

Ö4	K1	K2	K3
K1	0.4546	0.4546	0.4546
K2	0.4546	0.4546	0.4546
K3	0.0908	0.0908	0.0908

$$W_{\text{Ö4}} = \begin{bmatrix} 1.3638 / 3 \\ 1.3638 / 3 \\ 0.2724 / 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.46 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

Ölçüt 4'e göre, K1 %46, K2 %46 ve K3 %8 öneme sahiptir.

Seçenekler	Ö1
K1	0.33
K2	0.10
K3	0.57
λ_{max}	3.0258
CI	0.0126
CR	0.0217

Ölçüt 1'e göre karşılaştırma matrisi tutarlıdır. Burada, diğer ölçütlere göre karşılaştırma matrislerinin tutarlı olduğu kabul edilmiştir.

$$W_{Tüm} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.26 & 0.14 & 0.46 \\ 0.10 & 0.63 & 0.24 & 0.46 \\ 0.57 & 0.11 & 0.62 & 0.08 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.15 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.32 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

Buna göre, karar seçeneklerinin önem seviyeleri sırasıyla %28, %32 ve %40 tır.

K1 » K2 » K3 önceliklerine göre karar seçenekleri tercih edilir.