Örnek 1.5 : Bir tankta A ve B bileşenlerinden oluşan bir karışım kaynatılmaktadır. A ve B'nin buharlaşma hızları, tanktaki miktarları ile orantılıdır. A sıvısının miktarı x , B'nin y olduğuna göre sistemi tanımlayan matematiksel modeli çözünüz. Orantı katsayısının değeri k alınabilir.

Çözüm :

A'nın buharlaşma hızı : dx/dt

B'nın buharlaşma hızı : dy/dt

$$\frac{\text{A'nın buharlaşma hızı}}{\text{B'nın buharlaşma hızı}} = \alpha \frac{\text{A miktarı}}{\text{B miktarı}}$$

$$\frac{dx/dt}{dy/dt} = k\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = k^{-1}\frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = k^{-1}\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = k^{-1}\ln x + C$$

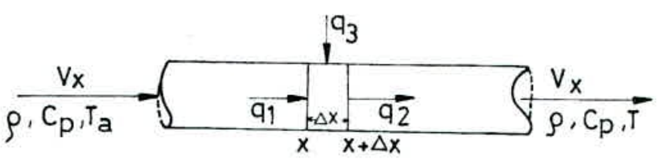
$$y = Cx^{1/k}$$

bulunur.

Örnek 1.6 : Çapı D ve dış duvar sıcaklığı T_0 olan boruya dışardan birim zamanda birim alandan q_r/A kadar ısı aktarılmaktadır. Borudan geçen akışkanın hızı V_x olup, değeri sabittir. Akışkanın yoğunluğu ρ, özgül ısısı C_p ve boruya giriş sıcaklığı T_a olarak verilmiştir. Sistemin yatışkın olduğunu varsayarak, sıcaklık profilini veren eşitliği çıkarınız. Akışkanın fiziksel özelikleri sabit alınabilir.

Çözüm :

Sistemde Δx kalınlığında diferansiyel (mikroskobik) hacim elemanı alınsın.



Hacim Elemanında Enerji Denkliği:

$$\begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Giriş Hızı}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Çıkış Hızı}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Üretim Hızı}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Birikim Hızı}\end{bmatrix}$$

$$(q_1 - q_3) \quad - \quad q_2 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0 \tag{1}$$

x konumunda enerjinin giriş hızı : $q_1 = \rho \frac{\pi}{4} D^2 V_x CpT \big|_x$ (2)

x+Δx konumunda enerjinin çıkış hızı : $q_2 = \rho \frac{\pi}{4} D^2 V_x CpT \big|_{x+\Delta x}$ (3)

πDΔx yüzeyinden enerjinin giriş hızı : $q_3 = \frac{q_r}{A} \pi D \Delta x$ (4)

Sistem yatışkın olduğundan birikim terimi sıfırdır. (2), (3), (4) eşitlikleri (1)'de yerlerine yazılırsa;

$$\rho \frac{\pi}{4} D^2 V_x CpT \big|_x - \rho \frac{\pi}{4} D^2 V_x CpT \big|_{x+\Delta x} - \frac{q_r}{A} \pi D \Delta x = 0 \tag{5}$$

(5) eşitliği yeniden düzenlenirse;

$$\rho \frac{\pi}{4} D^2 V_x Cp \left(T \big|_{x+\Delta x} - T \big|_x\right) - \frac{q_r}{A} \pi D \Delta x = 0 \tag{6}$$

Her iki taraf $\rho D \Delta x$ ile bölünürse;

$$\rho \frac{D}{4} CpV_x \left(\frac{T \big|_{x+\Delta x} - T \big|_x}{\Delta x} \right) - \frac{q_r}{A} = 0 \tag{7}$$

Her iki tarafın $\Delta x \to 0$ limiti alınırsa;

$$\rho \frac{D}{4} CpV_x \frac{dT}{dx} - \frac{q_r}{A} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{q_r}{\rho CpV_x (D/4) A} \tag{9}$$

elde edilir.

Sınır Koşulları: $x = 0$, $T = T_a$
$x = x$, $T = T$

için (9) eşitliği çözülürse;

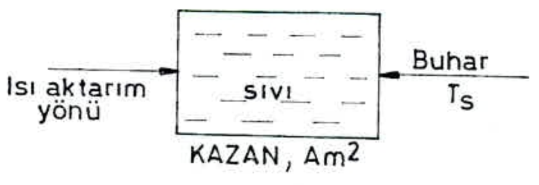
$$\int_{Ta}^{T} dT = \int_{0}^{x} \frac{q_r}{\rho C p V_x (D/4) A} dx \qquad (10)$$

$$T - T_a = \frac{q_r / A}{\rho C p V_x (D/4)} x \qquad (11)$$

Sıcaklık profilini veren eşitlik bulunur.

Örnek 1.7 : Toplam yüzey alanı A m^2 olan bir kazanda, özgül ısısı Cp(J/kg°C), sıcaklığı T_0(°C) olan M kg sıvı, kazanın dış yüzeyinde T_S(°C) sıcaklığında yoğunlaşan buhar yardımıyla ısıtıldığına göre; sıvının sıcaklığının zamanla değişimini bulunuz. Süreci kontrol eden ısı aktarım katsayısı h (W/m^2°C) dır.

Çözüm :



Enerjinin korunumu yasasına göre enerji denkliği yazılırsa;

$$\begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Giriş Hızı}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Çıkış Hızı}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Üretim Hızı}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Enerjinin}\\ \text{Birikim Hızı}\end{bmatrix}$$

Enerjinin giriş hızı : $hA(T_S - T)$ J/s
Enerjinin çıkış hızı : 0
Enerjinin üretim hızı : 0

Enerjinin birikim hızı : $\dfrac{d(MCpT)}{dt} = MCp\dfrac{dT}{dt}$

Burada M ve Cp sabittir.

$$hA(T_S - T) = MCp\frac{dT}{dt} \tag{1}$$

(1) eşitliği **değişkenlerine ayrılabilen adi türevli diferansiyel denklem**dir.

$$\frac{hA}{MCp}dt = \frac{dT}{T_S - T}$$

Başlangıç koşulu : $t = 0,\ T = T_0$
t anında : $t = t,\ T = T$

$$\int_0^t \frac{hA}{MCp}dt = \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T_S - T} \tag{2}$$

İntegral alınırsa,

$$\ln\left(\frac{T_S - T}{T_S - T_0}\right) = -\frac{hA}{MCp}t \tag{3}$$

elde edilir. (3) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\left(\frac{T_S - T}{T_S - T_0}\right) = e^{-(hA/MCp)t} \tag{4}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbf{T = T_S - (T_S - T_0)\, e^{-(hA/MCp)t}} \tag{5}$$

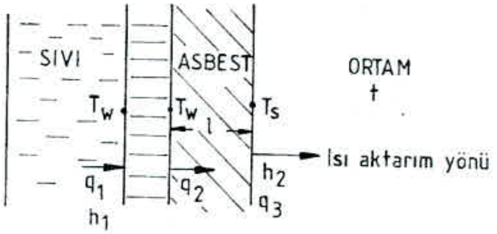
bulunur.

Örnek 1.8 : 1 m çapında ve 2 m uzunluğundaki silindirik bir tank, kesikli bir kimyasal süreçte olgunlaştırma tankı olarak kullanılmaktadır. Bu tank 4 cm kalınlığında asbest tabakasıyla yalıtılmıştır. 95 °C' daki sıvı, bu tanka boşaltıldıktan sonra, 5 gün süreyle olgunlaşma için bekletilmektedir. Aşağıdaki verileri kullanarak 5 gün sonra sıvının son sıcaklığını bulunuz. Sıvı sıcaklığının zamanla değişimini veren grafiği çiziniz.

Sıvı film ısı aktarım katsayısı (h_1)	: 150 W/m^2°C
Asbestin ısıl iletkenliği (k)	: 0.2 W/m°C
Radyasyon ve konveksiyonla ısı aktarım katsayısı (h_2)	: 10 W/m^2°C
Sıvının yoğunluğu (ρ)	: 1000 kg/m^3
Sıvının özgül ısısı (Cp)	: 2500 J/kg°C
Atmosfer sıcaklığının (t) zamanla değişimi	: $t=10+10\cos(\pi\theta/12)$ (θ:zaman, saat)
Yükleme anında atmosfer sıcaklığı	: 20 °C

Tank cidarının direnci ve yalıtkanın özgül ısısı dikkate alınmayabilir.

Çözüm :



Tankın alanı : $A = \pi DL + 2(\pi D^2/4) = \pi \cdot 1 \cdot 2 + 2(\pi \cdot 1^2/4) = 2.5\pi\ m^2$

Sudan konveksiyonla aktarılan ısı : $q_1 = h_1 A(T - T_w)$ (T sıvı sıcaklığı, T_w tankın cidar sıcaklığıdır)

Asbest yalıtkan boyunca aktarılan ısı : $q_2 = \dfrac{kA}{l}(T_w - T_s)$ (T_s yalıtkanın dış yüzey sıcaklığıdır)
(Fourier yasasına göre)

Isının yalıtkan yüzeyinden kaybolma hızı: $q_3 = h_2 A(T_s - t)$

Herbir tabakadan aktarılan enerji miktarı aynı olduğuna göre,

$$\begin{bmatrix} \text{Sıvıdan cidara} \\ \text{konveksiyonla ısı} \\ \text{aktarım hızı} \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Asbest yalıtkandan} \\ \text{kondüksiyonla} \\ \text{ısı aktarım hızı} \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Asbest yüzeyinden} \\ \text{kondüksiyonla} \\ \text{ısı aktarım hızı} \\ q \end{bmatrix} \tag{1}$$

yazılabilir.

$$h_1 A(T - T_w) = \frac{kA}{l}(T_w - T_s) = h_2 A(T_s - t) \tag{2}$$

(2) eşitliğinden;

$$h_1 A(T - T_w) = \frac{kA}{l}(T_w - T_s) \tag{3a}$$

$$\frac{kA}{l}(T_w - T_s) = h_2 A(T_s - t) \tag{3b}$$

(3a) eşitliğinden,

$$T_w\left(h_1 + \frac{k}{l}\right) = h_1 T + \frac{k}{l} T_S \qquad (4)$$

(4) eşitliğinden bulunan T_W değeri (3b)'de yerine konur ve düzenlenirse,

$$T_S = t + \frac{h_1 k}{h_1 h_2 l + h_1 k + h_2 k}(T - t) \qquad (5)$$

elde edilir. Veriler (5) eşitliğinde yerine konur ve düzenlenirse,

$$T_S = 0.326T + 0.674t \qquad (6)$$

elde edilir.

Tank etrafında enerji denkliği yazalırsa,

$$\underset{(I)}{\begin{bmatrix} \text{Enerjinin} \\ \text{Giriş Hızı} \end{bmatrix}} - \underset{(II)}{\begin{bmatrix} \text{Enerjinin} \\ \text{Çıkış Hızı} \end{bmatrix}} + \underset{(III)}{\begin{bmatrix} \text{Enerjinin} \\ \text{Üretim Hızı} \end{bmatrix}} = \underset{(IV)}{\begin{bmatrix} \text{Enerjinin} \\ \text{Birikim Hızı} \end{bmatrix}}$$

(I) terimi : 0

(II) terimi : $h_2 A(T_S - t)$

(III) terimi : 0

(IV) terimi : $\rho V C p \frac{dT}{d\theta}$

Buna göre;

$$-h_2 A(T_S - t) = \rho V C p \frac{dT}{d\theta} \qquad (7)$$

Yukarıda verilen sayısal değerler (7) eşitliğinde yerine yazılırsa (1 saat = 3600 s çevrimi unutulmamalıdır);

$$\frac{dT}{d\theta} = -\, 0.072\ (0.326T + 0.674t - t) \qquad (8)$$

$$\frac{dT}{d\theta} + 0.0235T = 0{,}0235t \quad ; \qquad t = 10 + 10\cos(\pi\theta/12) \qquad (9)$$

$$\frac{dT}{d\theta} + 0.0235T = 0.235 + 0.235\cos(\pi\theta/12) \tag{10}$$

(10) denklemi **1. mertebeden lineer diferansiyel denklemdir.** Çözüm için integral çarpanı $e^{0.0235\theta}$ 'den yararlanılır.

$$T \cdot e^{0.0235\theta} = \int 0.235e^{0.0235\theta}d\theta + \int 0.235e^{0.0235\theta}\cos(\pi\theta/12)d\theta \tag{11}$$

(11) eşiliğinin integrali alınırsa;

$$T = 10 + 0.89\sin(0.262\theta) + 0.08\cos(0.262\theta) + Ce^{-0.0235\theta} \tag{12}$$

bulunur. Başlangıç koşulu $\theta=0$, $T=95$ °C için;

$$95 = 10 + 0.08 + C \Rightarrow C = 84.92$$

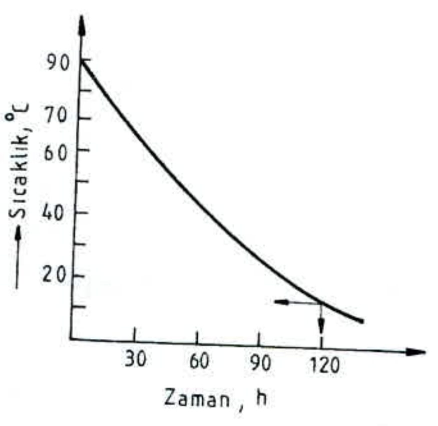
$$T = 10 + 0.89\sin(0.262\theta) + 0.08\cos(0.262\theta) + 84.92e^{-0.0235\theta} \tag{13}$$

elde edilir.

(13) eşitliğindeki ikinci ve üçüncü terimler küçük olduğundan, bu terimler ihmal edilebilir. Buna göre çözüm;

$$\mathbf{T = 10 + 84.92e^{-0.0235\theta}} \tag{14}$$

bulunur.



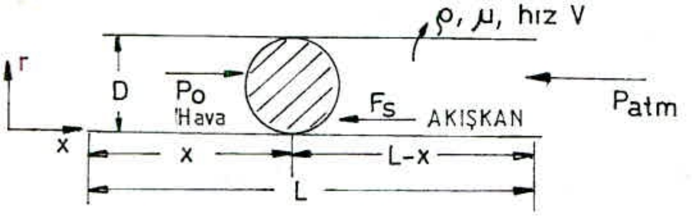
5 Gün(120 saat) sonra T = 15 °C

Örnek 1.9 : Boru hattı temizleyicileri; montaj sonrası boru temizlemede, hidrostatik test öncesi boru hattının doldurulmasında ve temizlenmesinde kullanılmaktadır.

Uzunluğu L olan boru hattının boşaltılması için bu tip bir temizleme topu aşağıdaki akış şemasında görüldüğü gibi kullanılmaktadır. Top P_0 basıncında kompresörle basılan hava ile sürüklenmektedir. İşlem süresince boru hattı içerisindeki akışkanın kütlesinin sürekli değiştiği göz önüne alınırsa, temizlenen boru hattının uzunluğunun işletme süresiyle değişimini modelleyiniz. Akışkanın hızı V olup, radyal yönde değişimi sıfırdır. Borunun diğer ucu atmosfere açıktır. Akışkanın fiziksel özeliklerinin boru hattı boyunca değişmediği varsayılabilir. Topun kütlesi akışkanın kütlesi yanında çok küçüktür.

P_0, L, D ve malzeme cinsini belirleyerek belli bir akışkan için sayısal çözüm yapınız.

Çözüm :



Newton'un 2.yasasına göre ($\Sigma F=m.a$);

Sisteme x ekseni boyunca P_0A kuvveti, buna ters yönde ise F_s sürtünme ve atmosfer basıncından dolayı kuvvetler etkimektedir.

$$P_0A - P_{at}.A - F_s = \frac{d(mV)}{dt} \tag{1}$$

Açıklama:
Sürtünme kuvveti (Fs): Düz bir boru için,

$$\frac{\Delta P}{\rho} = H_{fs} = 2f\frac{L}{D}V^2 \tag{2}$$

(2) eşitliği geçerlidir. Bu sistemde sürtünme kuvveti konuma göre değiştiğinde L yerine L-x alınmalıdır.

$$F_s = A\Delta P = A\rho 2f\frac{L-x}{D}V^2$$

$$K = 2fA\frac{\rho}{D} \quad \text{denilirse} \Rightarrow F_s = K(L-x)V^2 \tag{3}$$

olarak bulunur.