$$m = A(L - x)\rho \qquad (4) \qquad \text{ve} \qquad V = \frac{dx}{dt} \qquad (5)$$

yazılabilir. (3), (4) ve (5) eşitlikleri (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$P_0A - P_{at}.A - K(L\text{-}x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d(\rho A(1-x)(dx/dt))}{dt} \qquad (6)$$

Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$P_0 - P_{at} - \frac{K}{A}(L-x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \rho\left[(L-x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$$

$$P_0 - P_{at} + \left(\rho - \frac{K}{A}(L-x)\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \rho(L-x)\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\rho(L-x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\rho - \frac{K}{A}(L-x)\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (P_0 - P_{at}) = 0} \qquad (8)$$

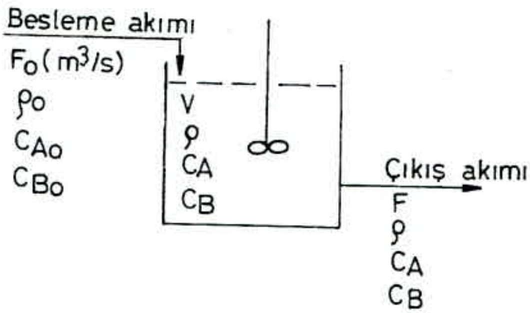
ikinci mertebe birinci derece değişken katsayılı Adi Diferansiyel Denklemi bulunur. (8) eşitliğinin analitik olarak çözülmesi çok güçtür. Sayısal çözüm ile sonuca daha çabuk ulaşılır.

Kimyasal Tepkimeli Sistemlerde Kütlenin Korunumu Yasasının Uygulanması

Örnek 1.10 : Aşağıdaki şekilde görülen sürekli çalışan bir tepkime kabında

$$A \xrightarrow{k} B$$

tepkimesi olmaktadır. k(s^{-1}) tepkime hız sabitidir. Bu sistemi kontrol eden eşitlikleri çıkarınız



Çözüm : Bu sistemde A ve B bileşenleri için kütle denkliği yazılırsa;

[Giriş Hızı] - [Çıkış Hızı] + [Üretim Hızı] = [Birikim Hızı]

1) A bileşeni için:

$$F_0C_{A0} - FC_A - kC_AV = \frac{d(VC_A)}{dt} \qquad (1)$$

2) B bileşeni için:

$$F_0C_{B0} - FC_B + kC_AV = \frac{d(VC_B)}{dt} \qquad (2)$$

t anında tepkime kabındaki karışımın yoğunluğu ρ ise;

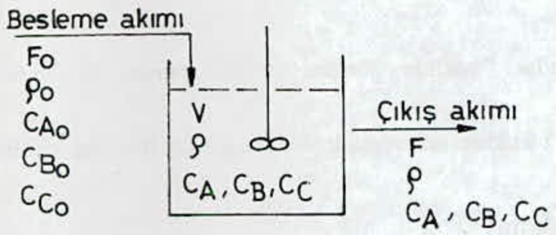
$$M_AC_A + M_BC_B = \rho \qquad (3)$$

(1),(2) ve (3) sistemi kontrol eden eşitliklerdir.

Örnek 1.11 : Aşağıda akış şeması verilen sistemde seri

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

tepkimeleri olmaktadır. Sistemi kontrol eden eşitlikleri çıkarınız.



Çözüm :

Kütle Denklikleri:

1) A bileşeni için:

$$F_0C_{A0} - FC_A - k_1C_AV = \frac{d(VC_A)}{dt} \qquad (1)$$

2) B bileşeni için:

$$F_0C_{B0} - FC_B + k_1C_AV - k_2C_BV = \frac{d(VC_B)}{dt} \quad (2)$$

3) C bileşeni için:

$$F_0C_{C0} - FC_C + k_2C_BV = \frac{d(VC_C)}{dt} \quad (3)$$

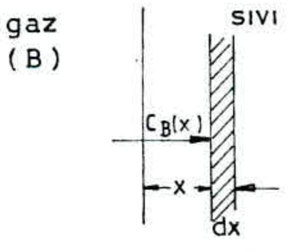
t anında tepkime kabındaki karışımın yoğunluğu ρ ise;

$$M_AC_A + M_BC_B + M_CC_C = \rho \quad (4)$$

yazılabilir.

Örnek 1.12 : B gazı temasta bulunduğu C çözeltisi içine yayınmakta ve bu çözeltide 1. mertebe bir tepkime ile ürüne dönüşmektedir. Yatışkın olan bu sistem için geçerli eşitlikleri çıkarınız.

$$B \xrightarrow{k} \text{ürünler}$$



Çözüm :

(Adx) hacim elemanında B bileşeni için kütle denkliği yazılırsa;

$$[\text{Giriş Hızı}] - [\text{Çıkış Hızı}] + [\text{Üretim Hızı}] = [\text{Birikim Hızı}] \quad (1)$$

Gazın sisteme giriş ve çıkışı moleküler yayınma (difüzyon) ile olur, yığın hareketi (v=0) yoktur.

B bileşeni için molar akı : $N_B = -D_B \frac{dC_B}{dx}$

x konumunda kütlenin giriş hızı : $N_BA|_x$

x + dx konumunda kütlenin çıkış hızı : $N_BA|_{x+\Delta x} = N_BA|_x + \frac{d(N_BA)}{dx}\Delta x$

Tüketim hızı : $-kC_BA\Delta x$

Birikim hızı : 0

Bu ifadeler (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$N_BA|_x - N_BA|_{x+dx} - kC_BA\Delta x = 0 \tag{2}$$

elde edilir.

Açıklama: *$f(x+\Delta x)$ fonksiyonun Taylor açılımı olmak üzere;*

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots.$$

şeklindedir. İlk türevden sonraki terimler ihmal edilirse;

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x$$

elde edilir.

$$N_BA|_x - [\,N_BA|_x + \frac{d(N_BA)}{dx}\Delta x\,] - kC_BA\Delta x = 0 \tag{3}$$

$$-A\frac{dN_B}{dx}\Delta x - kC_BA\Delta x = 0 \tag{4}$$

(4) eşitliğinde her iki taraf $A\Delta x$ ile bölünür, N_B yerine Fick yasasından eşiti yazılırsa;

$$-\frac{d(-D_BdC_B/dx)}{dx} - kC_B = 0$$

$$D_B\frac{d^2C_B}{dx^2} - kC_B = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2C_B}{dx^2} - \frac{k}{D_B}C_B = 0 \tag{6}$$

2. mertebe lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemi bulunur.

(6)'nın genel çözüm: $C_B = Z + I$ şeklindedir.

Z, tamamlayıcı fonksiyonunun bulunması:

Diferansiyel denklemin sol tarafı D operatörü (d/dx) cinsinden yazılarak sıfıra eşitlenir.

$$\left[D^2 - \frac{k}{D_B}\right] C_B = 0 \qquad (7)$$

$$D = \pm\,(k/D_B)^{1/2}$$

$$Z = C_1 e^{(k/D_B)^{1/2} x} + C_2 e^{-(k/D_B)^{1/2} x} \qquad (8)$$

I, özel integral değerinin bulunması:

I değeri Çizelge 1.1'den A olarak okunur.

Genel çözüm:

$$\mathbf{C_B = C_1 e^{(k/D_B)^{1/2} x} + C_2 e^{-(k/D_B)^{1/2} x} + A} \qquad (9)$$

bulunur.

Açıklama:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = Q$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin özel integrallerinin bulunması:

Çizelge 1.1

Q	Özel integral
sabit a	sabit A
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$
be^{rx}	Be^{rx}
ccoskx, dsinkx	Ccoskx + Dsinkx
$gx^n e^{rx}\cos kx$	$(G_n x^n + G_{n-1} x^{n-1} + \cdots + G_0) e^{rx}\cos kx$
$hx^n e^{rx}\sin kx$	$(H_n x^n + H_{n-1} x^{n-1} + \cdots + H_0) e^{rx}\sin kx$

Bu çizelgenin kullanımında aşağıdaki durumlar dikkate alınmalıdır.

1) Q, tabloda görülen bir kaç terimin toplamı şeklinde ise, özel integral de bu terimlere karşılık gelen bağımsız özel çözümlerin toplamıdır.
2) Çizelge 1.1'den bulunan bir terim, tamamlayıcı fonksiyonunun bir parçası ise, özel integrallerin çizelgede görülen şekli x ile çarpılmalıdır.

Özel integrallerin şekli belli olduktan sonra, bunun denklemde yerine konulmasıyla özel integrallerdeki sabitler bulunur.

Örnek 1.13 : Bir sıvıda mikroorganizma topluluğunun doğal üreme hızı k_1;üreyen mikroorganizma sayısı/(ortamdaki mikroorganizma·s) birimiyle verilmektedir. Başlangıçta ortamdaki mikroorganizma sayısı N'dir. Ortamdan mikroorganizma uzaklaştırma hızı k_2; mikroorganizma sayısı/s'dır. Mikroorganizma topluluğundaki değişimi belirleyecek diferansiyel eşitliği çıkarınız. Bu sistemde mikroorganizma sayısının zamanla değişimini verecek eşitliği bulunuz.

Çözüm :

n : t anında ortamda bulunan mikroorganizma sayısı

k_1 : mikroorganizma sayısı/(ortamdaki mikroorganizma·s)

k_2 : mikroorganizma sayısı/s

Sistemdeki mikroorganizma denkliği yazılırsa;

[Giriş Hızı] - [Çıkış Hızı] + [Üretim Hızı] = [Birikim Hızı]

$$0 \quad - \quad k_2 \quad + \quad k_1 n \quad = \quad \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{dn}{dt} - k_1 n = -k_2 \qquad (1)$$

(1) eşitliği **1. mertebe lineer diferansiyel denklemdir.**

$$\frac{dy}{dx} + P\,y = Q$$

biçiminde bir denklemin çözümü;

$$yI = \int QI dx + C$$