(4) eşitliğinden, $\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{(2c+2)(2c+3)}$ (8)

(5) eşitliğinden, $\frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{(2c+4)(2c+5)}$ (9)

(6) eşitliğinden, $\frac{a_3}{a_2} = -\frac{1}{(2c+6)(2c+7)}$ (10)

...

(7) eşitliğinden, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{(2n+2c)(2n+2c+1)}$ (Tekrarlama Bağıntısı) (11)

a_n/a_0 oranı,

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0}$$

olarak yazılır. (8-11) eşitlikleri burada yerine konursa;

$$\frac{a_n}{a_0} = \left(-\frac{1}{(2n+2c)(2n+2c+1)}\right)\dots\left(-\frac{1}{(2c+6)(2c+7)}\right)\left(-\frac{1}{(2c+4)(2c+5)}\right)\left(-\frac{1}{(2c+2)(2c+3)}\right)$$

$$\boxed{\frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^n}{(2n+2c+1)!}}$$

<u>**c=0 için;**</u> $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_0$ ve $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!} x^n \frac{x^{1/2}}{x^{1/2}}$$

$$y_1 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)/2}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$y_1 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$$

bulunur.

<u>c=-1/2 için;</u> $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$ ve $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n-1/2)}$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{(n-1/2)} \frac{x^{1/2}}{x^{1/2}}$$

$$y_2 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ olduğuna göre,

$$y_2 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$$

dir. Böylece **genel çözüm,**

$$\boxed{\mathbf{y = A\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + B\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}$$

Örnek 3.2 : (Frobenius yöntemi - 2. durum)

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

diferansiyel denklemini Frobenius yöntemine göre çözünüz.

Çözüm :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

biçimindeki seri, yukarda verilen diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Buna göre;

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2}$$

eşitlikleri diferansiyel denklemde yerine konursa;

$$x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)\left[(n+c-1)+1\right]x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(n+c)+1\right]x^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c+1)x^{n+c}=0 \qquad (1)$$

x^{n+c-1} 'in katsayısı sıfıra eşitlenir ve c bulunur.

n=0 için, $a_0c^2=0$, **(İndis eşitliği)** $\Rightarrow$ $c_1=0$, $c_2=0$

$j=c_1-c_2=0$ olduğundan diferansiyel denklem Frobenius yöntemi **2. duruma** göre çözülür. Genel çözüm denklemi,

$$y=\alpha\, u(x,c_1)+\beta\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=c_1}$$

şeklindedir. (1) eşitliğinden,

n=0 için x^{c-1} 'in katsayısı, $a_0\,c^2=0$ (indis eşitliği) (2)
n=1;0 için x^{c} 'in katsayısı, $a_1\,(c+1)^2-a_0\,(c+1)=0$ (3)
n=2;1 için x^{c+1}'in katsayısı, $a_2\,(c+2)^2-a_1\,(c+2)=0$ (4)
...
n=n;n-1 için x^{n+c-1} 'in katsayısı, $a_n\,(n+c)^2-a_{n-1}\,(n+c)=0$ (5)

(3-5) eşitliklerinden,

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{(c+1)}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{(c+2)}$$

...

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{(n+c)} \quad \text{(Tekrarlama bağıntısı)}$$

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{(n+c)} \cdots \frac{1}{(c+2)}\frac{1}{(c+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+c)!}a_0 \qquad (6)$$

$$y_1 = u(x,c_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c_1} \qquad (7)$$

Birinci çözüm y_1'i bulmak için (6) eşitliği (7)'de yerine konur.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+c_1}}{(n+c_1)!}a_0 \qquad , \qquad (c_1 = 0)$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}a_0$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ olduğundan $y_1 = a_0\, e^x$ 'dir.

$$\mathbf{y_1 = u(x,c_1) = \alpha\, e^x} \qquad (8)$$

$$y_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=c_1} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+c}}{(n+c)!}a_0\right)_{c=c_1} \qquad (9)$$

(9) eşitliğinin c'ye göre türevini almak için aşağıdaki gibi bir düzenleme yapılır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+c}}{(n+c)!} = x^{n+c}\, f_{n+1}(c).f_n(c).f_{n-1}(c)\dots.f_4(c).f_3(c).f_2(c).f_1(c)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+c}}{(n+c)!} = x^{n+c}\frac{1}{(n+c)}\frac{1}{(n+c-1)}\cdots\frac{1}{(c+4)}\frac{1}{(c+3)}\frac{1}{(c+2)}\frac{1}{(c+1)}$$

$$f_{n+1}(c) = x^{n+c}, \quad f_n(c) = \frac{1}{(n+c)}, \quad f_{n-1}(c) = \frac{1}{(n+c-1)}, \dots \quad f_4(c) = \frac{1}{(c+4)},$$

$$f_3(c) = \frac{1}{(c+3)}, \quad f_2(c) = \frac{1}{(c+2)}, \quad f_1(c) = \frac{1}{(c+1)} \qquad (10)$$

$$\ln y = \ln f_{n+1}(c) + \ln f_n(c) + \dots + \ln f_3(c) + \ln f_2(c) + \ln f_1(c)$$

$$y_2=\frac{dy}{dc}=y\left[\frac{f'_{n+1}(c)}{f_{n+1}(c)}+\frac{f'_n(c)}{f_n(c)}+.....+\frac{f'_4(c)}{f_4(c)}+\frac{f'_3(c)}{f_3(c)}+\frac{f'_2(c)}{f_2(c)}+\frac{f'_1(c)}{f_1(c)}\right] \qquad (11)$$

$$f'_{n+1}(c)=x^{n+c}\ln x\,,\quad f'_n(c)=-1/(n+c)^2\,,\ .....\,,\quad f'_4(c)=-1/(c+4)^2\,,$$
$$f'_3(c)=-1/(c+3)^2\,,\quad f'_2(c)=-1/(c+2)^2\,,\quad f'_1(c)=-1/(c+1)^2 \qquad (12)$$

(10) ve (12) eşitlikleri (11)'de yerine konarak ikinci çözüm (y_2) bulunur.

$$y_2=\frac{dy}{dc}=a_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+c}}{(n+c)!}\left(\ln x-\frac{1}{c+n}-\ \dots\ -\frac{1}{c+4}-\frac{1}{c+3}-\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+1}\right)\right]_{c=0}$$

$$y_2=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\ln x-\frac{1}{n}-\dots-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)$$

$$\mathbf{y_2=\beta\, e^x \ln x-\beta\, e^x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{n}\right)} \qquad \mathbf{(13)}$$

Genel çözüm : $y=y_1+y_2$

$$\mathbf{y=\alpha\, e^x+\beta\left[e^x\ln x-e^x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{n}\right)\right]}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3 :

$$x(1-x)\,\frac{d^2y}{dx^2}+(2-5x)\,\frac{dy}{dx}-4y=0$$

diferansiyel denklemini Frobenius yöntemine göre çözünüz.

Çözüm :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+c}$$

biçimindeki seri, yukarda verilen diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Buna göre;

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}$$

ifadeleri diferansiyel eşitlikte yerine konursa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[x(1-x)a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+(2-5x)a_n(n+c)x^{n+c-1}-4a_nx^{n+c}\right]=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-1}-a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c}+2a_n(n+c)x^{n+c-1}\right.$$
$$\left.-5a_n(n+c)x^{n+c}-4a_nx^{n+c}\right]=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+c)(n+c-1)+2a_n(n+c)\right]x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+c)(n+c-1)+5a_n(n+c)+4a_n\right]x^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c+1)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(n+c)((n+c-1)+5)+4\right]x^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c+1)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c+2)^2x^{n+c}=0$$

İndis eşitliği ($n=0$ ve x^{c-1} için), $\mathbf{a_0\,c\,(c+1)=0}$
a_0 sıfırdan farklı olduğundan, $\mathbf{c_1=-1}$ ve $\mathbf{c_2=0}$ 'dir.

$j=c_1-c_2=-1-0=-1$'dir. j tamsayı olduğundan diferansiyel denklem Frobenius yöntemi **3. duruma** göre çözülmelidir. Buna göre genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y=A\;u(x,c_2)+B\;\frac{\partial}{\partial c}\;[(c-c_1)u(x,c)]_{c=c1}$$

a_n katsayısının bulunması :

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{(c+2)^2}{(c+1)(c+2)}=\frac{c+2}{c+1}$$

Burada $c=-1$ için belirsizlik ortaya çıkar $(a_1/a_0=\infty)$.
Bu nedenle birinci çözüm için $c_2=0$ alınmalıdır.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{(c+3)^2}{(c+2)(c+3)}=\frac{c+3}{c+2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{(c+4)^2}{(c+3)(c+4)} = \frac{c+4}{c+3}$$

...

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(c+n+1)^2}{(n+c)(n+c+1)} = \frac{n+c+1}{n+c} \qquad \text{(Tekrarlama bağıntısı)}$$

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0} = \frac{n+c+1}{n+c} . \frac{n+c}{n+c-1} \ldots \frac{c+4}{c+3} . \frac{c+3}{c+2} . \frac{c+2}{c+1} = \frac{n+c+1}{c+1}$$

$$\mathbf{a_n = \frac{n+c+1}{c+1} a_0}$$

$$y_1 = u(x,c_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c_2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+c+1}{c+1} a_0 x^{n+c} \right]_{c_2=0}$$

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = a_0(1+2x+3x^2+4x^3+....+(n+1)\, x^n)$$

$$\mathbf{y_1 = \frac{a_0}{(1-x)^2}} \tag{1}$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c} \left[(c-c_1)\, u(x,c)\right]_{c=c_1=-1} = \frac{\partial}{\partial c} \left[(c+1)\, u(x,c)\right]_{c=-1} \tag{2}$$

$$u(x,c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+c+1}{c+1} a_0 x^{n+c}$$

$$(c+1)\, u(x,c) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+c+1) a_0 x^{n+c} \tag{3}$$

(3) eşitliği (2)'de yerine konursa;

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+c+1) a_0 x^{n+c} \right]_{c=-1} \qquad , \ (d(x^{n+c}) / dc = x^{n+c} \ln x)$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c} \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \left[x^{n+c} + (n+c+1) x^{n+c} \ln x \right]_{c=-1} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1} + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \ln x$$

$$y_2 = a_0 (x^{-1} + 1 + x + x^2 + ...) + a_0 \ln x\,(1 + 2x + 3x^2 + ...)$$

$$y_2 = \frac{a_0}{x}(1 + x + x^2 + ...) + a_0 \ln x\,(1 + 2x + 3x^2 + ...)$$

bulunur. Burada;

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... \quad \text{ve} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

olduğundan y_2 çözümü,

$$y_2 = \frac{a_0}{x(1-x)} + \frac{a_0 \ln x}{(1-x)^2} \tag{4}$$

şeklindedir. (1) ve (4) ile verilen eşitliklerden genel çözüm ($y=y_1+y_2$) elde edilir.

$$\boxed{y = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{x(1-x)} + \frac{B \ln x}{(1-x)^2}}$$

Örnek 3.4 :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x-1)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

diferansiyel denklemini Frobenius yöntemine göre çözünüz.

Çözüm :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

biçimindeki seri, yukarda verilen diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Buna göre;

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2}$$

eşitlikleri diferansiyel denklemde yerine konursa;

$$x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a_n(n+c)(n+c-1)-a_n(n+c)]x^{n+c-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[a_n(n+c)-a_n]x^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-2)x^{n+c-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c-1)x^{n+c}=0 \qquad (1)$$

İndis eşitliği ($n=0$, x^{c-1} için) : $\mathbf{a_0\, c\,(c-2)=0}$

$a_0 \neq 0$ olduğundan, $\mathbf{c_1=0}$ ve $\mathbf{c_2=2}$ 'dir.

$j=c_1-c_2=0-2=-2$ 'dir. j tamsayı olduğundan diferansiyel denklem, Frobenius yöntemi **3. duruma** göre çözülür.

<u>a_n **katsayısının bulunması :**</u> (1) eşitliğinden;

$n=0$ için x^{c-1} 'nin katsayısı, $a_0c(c-2)=0$ (indis eşitliği) (2)
$n=1;0$ için x^c 'in katsayısı, $a_1(c+1)(c-1)+a_0(c-1)=0$ (3)
$n=2;1$ için x^{c+1} 'in katsayısı, $a_2(c+2)c+a_1c=0$ (4)
$n=3;2$ için x^{c+2}'nin katsayısı, $a_3(c+3)(c+1)+a_2(c+1)=0$ (5)
.
.
.
$n=n;n-1$ için x^{n+c-1}'in katsayısı, $a_n(n+c)(n+c-2)+a_{n-1}(n+c-2)=0$ (6)

yazılır. (3-6) eşitliklerinden;

$$\frac{a_1}{a_0}=-\frac{(c-1)}{(c+1)(c-13)}=-\frac{1}{c+1} \qquad (7)$$

$$\frac{a_2}{a_1}=-\frac{c}{(c+2)c}=-\frac{1}{c+2} \qquad (8)$$

$$\frac{a_3}{a_2}=-\frac{(c+1)}{(c+3)(c+1)}=-\frac{1}{c+3} \qquad (9)$$

...

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{(n+c-2)}{(n+c)(n+c-2)}=-\frac{1}{n+c} \quad \text{(Tekrarlama bağıntısı)} \qquad (10)$$

bulunur. c'nin 0 ve 2 değerlerinden hangisinin birinci çözümde kullanılacağı, bir başka deyişle hangi değerin c_2 olarak alınacağı tekrarlama bağıntısı yardımı ile belirlenmelidir. Bu bağıntıya göre, n=2 için c=0 olması durumunda a_n/a_{n-1} oranı, pay ve payda sıfır değerini alacağından belirsizlik vermektedir. Bu nedenle birinci çözümde $c_2=2$ olarak alınmalıdır. Böylece indis eşitliğinden bulunan c_1 ve c_2 değerleri de kontrol edilmiş olur. Sonuç olarak $c_1=0$ ve $c_2=2$ alınmalıdır.

$$\frac{a_n}{a_0}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\ \ldots\ \frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0}=\frac{-1}{n+c}\cdot\frac{-1}{n+c-1}\ \ldots\ \frac{-1}{c+3}\cdot\frac{-1}{c+2}\cdot\frac{-1}{c+1}\cdot\frac{c}{c}$$

Yukarıda da görüldüğü gibi a_n/a_0 oranı oluşturulurken $c_2=2$ olduğundan **pay ve payda c ile çarpılarak düzeltme yapılmıştır.** (n+c)! ifadesinin yazılabilmesi için bu gereklidir.

$$\frac{a_n}{a_0}=\frac{2(-1)^n}{(n+c)!}$$

$$a_n=\frac{2(-1)^n}{(n+c)!}a_0$$

$$u(x,c)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a_0 x^{n+c}}{(n+c)!} \qquad (11)$$

$$y_1=u(x,c_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a_0 x^{n+2}}{(n+2)!}=2a_0\left[\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad \text{olduğundan,}$$

$$y_1=2\,a_0\,(\,e^{-x}-1+x\,) \qquad (12)$$

bulunur.

$$y_2=\frac{\partial}{\partial c}\,[(c-c_1)\,u(x,c)]_{c=c_1=0}$$

$$y_2=\frac{\partial}{\partial c}\left[(c-0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a_0 x^{n+c}}{(n+c)!}\right]_{c=c_1=0}$$