$$y_2 = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{c x^{n+c}}{(n+c)!} \right)_{c=0} \right]$$

$$y_2 = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{(1 \cdot x^{n+c} + c x^{n+c} \ln x)(n+c)! - \left(\frac{\partial}{\partial c}(n+c)! \right) c x^{n+c}}{((n+c)!)^2} \right]$$

$$y_2 = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n n!}{(n!)^2} = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

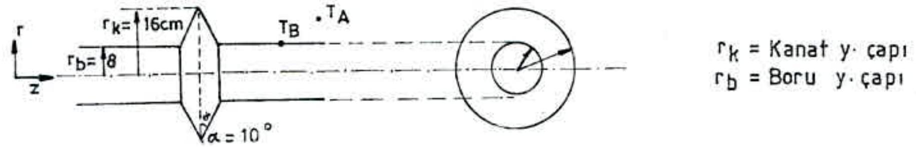
$$\mathbf{y_2 = 2a_0\, e^{-x}} \qquad (13)$$

(12) ve (13) eşitliklerinden **genel çözüm** ($y=y_1+y_2$) bulunur.

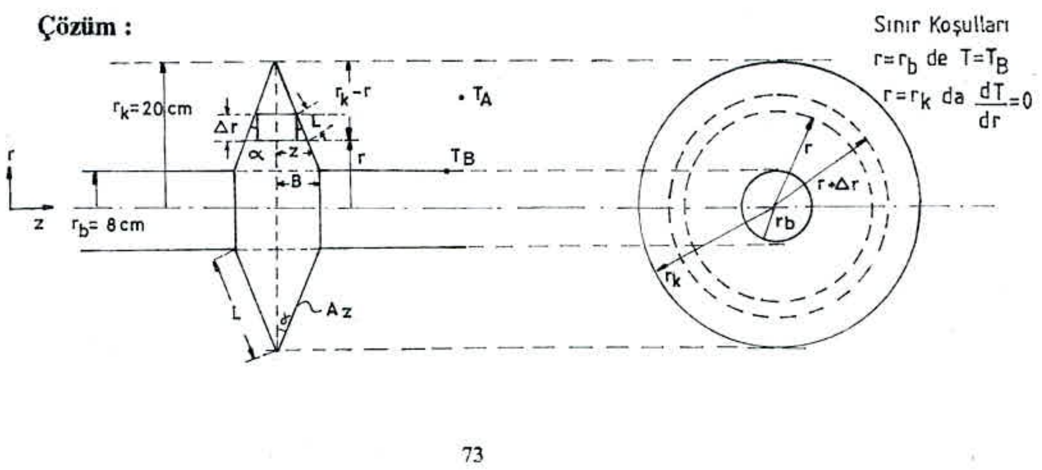
$$y = 2a_0\,(e^{-x} - 1 + x) + 2a_0\, e^{-x} = a\, e^{-x} - a\,(1-x) + b\, e^{-x}$$
$$y = (a+b)\, e^{-x} - a\,(1-x)$$

$$\mathbf{y = A\, e^{-x} + B\,(1-x)}$$

Örnek 3.5 : Bir soğutma kanatçığının şekli aşağıda verilmektedir. Borunun ve soğutma kanatçığının yarıçapı sırasıyla 8 cm ve 20 cm'dir. Kanatçığın ısıl iletkenliği k=380 W/m°C ve yüzey ısı aktarım katsayısı h=12 W/m²°C'dir. Ortam sıcaklığının T_A olması durumunda kanatçıktaki sıcaklık değişimini veren bağıntıyı çıkarınız.



Çözüm :



Merkezden r uzaklıkta bulunan hacim elemanında enerji denkliği kurulursa,

[Giriş Hızı] - [Çıkış Hızı] + [Üretim Hızı] = [Birikim Hızı]

Sistemde enerji üretimi ve enerji birikimi olmadığından bu terimler sıfırdır.

$$\begin{bmatrix} r = r \text{ uzaklığından} \\ \text{kondüksiyonla} \\ \text{giren enerji} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r = r + \Delta r \text{ uzaklığından} \\ \text{kondüksiyonla} \\ \text{çıkan enerji} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Kanatçığın yüzeyinden} \\ \text{konveksiyonla} \\ \text{çıkan enerji} \end{bmatrix} = 0$$

$$q\,|_r - q\,|_{r+\Delta r} - A_Z\, h\,(T-T_A) = 0 \quad , \quad q = -k\, A_Z\, dT/dr \tag{1}$$

$$\left[-kA_r \frac{dT}{dr}\right]_r - \left[-kA_r \frac{dT}{dr}\right]_{r+\Delta r} - A_Z h(T-T_A) = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&A_r = A_r(r) \quad , \quad A_Z = A_Z(z) \\
&\tan\alpha = B/(r_k - r_b) = z/(r_k - r) \text{ ise} \\
&z = (r_k - r)\tan\alpha \\
&2z = 2(r_k - r)\tan\alpha \\
&A_r = 2\pi r(2z) = 2\pi r[2(r_k - r)\tan\alpha] \\
&A_r = 4\pi r(r_k - r)\tan\alpha \\
&\cos\alpha = (r_k - r_b)/L = \Delta r/L \quad \text{ise} \\
&L = \Delta r/\cos\alpha \\
&2L = 2\,\Delta r/\cos\alpha
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&A_Z = 2\pi r(2L) = 2\pi r(2\,\Delta r/\cos\alpha) \\
&A_Z = 4\pi r\,\Delta r/\cos\alpha
\end{aligned} \tag{4}$$

A_r ve A_Z (2) eşitliğinde yerine konur.

$$\left[-k(4\pi r(r_k - r)\tan\alpha)\frac{dT}{dr}\right]_r - \left[-k(4\pi r(r_k - r)\tan\alpha)\frac{dT}{dr}\right]_{r+\Delta r} - 4\pi r\,\Delta r/\cos\alpha\; h(T-T_A) = 0 \tag{5}$$

$$\left[-kr(r_k - r)\tan\alpha\frac{dT}{dr}\right]_r - \left[-kr(r_k - r)\tan\alpha\frac{dT}{dr}\right]_{r+\Delta r} - (r\,\Delta r/\cos\alpha)\; h(T-T_A) = 0 \tag{6}$$

Eşitliğin her iki tarafı Δr ve $\tan\alpha$ ile bölünür.

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\left[-kr(r_k - r)\frac{dT}{dr}\right]_r - \left[-kr(r_k - r)\frac{dT}{dr}\right]_{r+\Delta r}}{\Delta r} - (rh/\tan\alpha\cos\alpha)\,(T-T_A) = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{d}{dr}\left[-kr(r_k-r)\frac{dT}{dr}\right]-\frac{rh}{\sin\alpha}(T-T_A)=0\,, \qquad (k\text{=sabit}) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dr}\left[(r_k r-r^2)\frac{dT}{dr}\right]-\frac{rh}{k\sin\alpha}(T-T_A)=0 \tag{9}$$

$$(r_k r-r^2)\frac{d^2T}{dr^2}+(r_k-2r)\frac{dT}{dr}-rK(T-T_A)=0 \quad , \quad \left(K=\frac{h}{k\sin\alpha}\right) \tag{10}$$

$T\text{-}T_A = y$ dönüşümü yapılırsa $dT/dr=dy/dr$ ve $d^2T/dr^2=d^2y/dr^2$ olur.

$$(r_k r\text{-}r^2)\frac{d^2y}{dr^2} + (r_k\text{-}2r)\frac{dy}{dr} - rKy = 0 \tag{11}$$

(11) eşitliği değişken katsayılı ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemdir. Frobenius yöntemine göre çözülebilir.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c}$$

$$\frac{dy}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)r^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)(n+c-1)r^{n+c-2}$$

(12-14) eşitlikleri (11)'de yerine konur (r_k=20 cm).

$$(20r\text{-}r^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)(n+c-1)r^{n+c-2} + (20\text{-}2r)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)r^{n+c-1} - rK\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c} = 0 \tag{15}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)(n+c-1)r^{n+c} + 20\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)(n+c-1)r^{n+c-1} + 20\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)r^{n+c-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)r^{n+c} - K\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c+1} = 0 \tag{16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[-a_n(n+c)(n+c-1)-2a_n(n+c)\right]r^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[20a_n(n+c)(n+c-1)+20a_n(n+c)\right]r^{n+c-1} - K\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c+1} = 0 \tag{17}$$

$$20\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+c)(n+c-1)+a_n(n+c)\right]r^{n+c-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+c)(n+c-1)-2a_n(n+c)\right]r^{n+c} - K\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c+1} = 0 \tag{18}$$

$$20\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)^2 r^{n+c-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+c)(n+c+1)r^{n+c} - K\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+c+1} = 0 \qquad (19)$$

n=0 için $20a_0c^2r^{c-1}=0$, (a_0 ve r^{c-1} sıfırdan farklıdır)

$$\mathbf{20\,c^2 = 0}\ ,\quad \textbf{(İndis eşitliği)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c_1=0}\ \text{ve}\ \mathbf{c_2=0} \qquad (20)$$

j=0 olduğundan Frobenius yöntemi **2. duruma** göre çözülmelidir.

Genel çözüm : $y=Au(r,0) + B(\partial u/\partial c)_{c=0}$

a_n katsayısının bulunması :

r^c 'nin katsayısı; $20a_1(c+1)^2-a_0c(c+1)=0$ c=0 için, $a_1/a_0=0$ olduğundan $a_1=0$ (21)

r^{c+1}'in katsayısı; $20a_2(c+2)^2-a_1(c+1)(c+2)-Ka_0=0$ c=0 için($a_1=0$), $a_2=Ka_0/80$ (22)

r^{c+2}'nin katsayısı; $20a_3(c+3)^2-a_2(c+2)(c+3)-Ka_1=0$ c=0 için($a_1=0$ ve $a_2=Ka_0/80$), $a_3=Ka_0/2400$ (23)

.

.

.

r^{n+c-1}'in katsayısı; $20a_n(n+c)^2-a_{n-1}(n+c-1)(n+c)-Ka_{n-2}=0$

$$a_n = \frac{a_{n-1}(n+c-1)(n+c)+Ka_{n-2}}{20(n+c)^2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}(n-1)n+Ka_{n-2}}{20n^2}\ , \quad \text{(c=0 için)} \qquad (24)$$

(21-24) eşitliklerinde bulunan katsayılar birinci çözüm y_1'de yerine konur.

$$y_1=u(r,c)=\left(a_0r^c+\frac{Ka_0}{20(c+2)^2}r^{c+2}+\frac{Ka_0}{400(c+2)(c+3)}r^{c+3}+\ldots\right)$$

$$y_1=u(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{n+c}=a_0+a_1r+a_2r^2+a_3r^3+\ldots.$$

$$y_1=a_0+0+Ka_0r^2/80+Ka_0r^3/2400+\ldots$$

$$\mathbf{y_1=a_0(1+Kr^2/80+Kr^3/2400+\ldots)} \qquad (25)$$

İkinci çözüm için;

$$y_2=\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=0}=\frac{\partial}{\partial c}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{n+c}\right)$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c}\left(a_0 r^c + \frac{Ka_0}{20(c+2)^2} r^{c+2} + \frac{Ka_0}{400(c+2)(c+3)} r^{c+3} + \ldots \right)_{c=0}$$

$$y_2 = a_0\left[\left[1 + \frac{Ka_0}{80} r^2 + \frac{Ka_0}{2400} r^3 + \ldots\right]\ln r - \frac{K}{80} r^2 - \frac{5K}{14400} r^3 - \ldots\right]$$

Genel çözüm : $y = y_1 + y_2$

$$\mathbf{y = A\left[1 + \frac{K}{80} r^2 + \frac{K}{2400} r^3 + \ldots\right](1 + \ln r) - B\left[\frac{K}{80} r^2 + \frac{5K}{14400} r^3 + \ldots\right]}$$

K'nın sayısal değeri hesaplanarak yukarıdaki eşitlikte yerine konursa,

$$y = A(1 + 2.27 \cdot 10^{-5} r^2 + 7.58 \cdot 10^{-7} r^3 + \ldots)(1 + \ln r) - B(2.27 \cdot 10^{-3} r^2 + 6.3 \cdot 10^{-5} r^3 + \ldots)$$

elde edilir.(A ve B katsayıları sınır koşullarından bulunabilir).

3.2. Bessel Eşitliği

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0 \quad , \ k \geq 0 \text{ (sabit)} \tag{3.21}$$

biçimindeki değişken katsayılı ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemlere **Bessel Eşitliği** adı verilir.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = a_0 x^c + a_1 x^{c+1} + a_2 x^{c+2} + \ldots \tag{3.22}$$

eşitliğinin (3.21)'i sağladığı düşünülürse;

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2} \tag{3.23}$$

(3.22) ve (3.23) eşitlikleri (3.21)'de yerine konursa;

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1} + (x^2 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = 0 \tag{3.24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c} + (x^2 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = 0 \tag{3.25}$$

elde edilir. İndis eşitliğini yazabilmek için en küçük üslü x'in katsayıları sıfıra eşitlenir.

x^c için, $a_0c(c-1) + a_0c - k^2a_0 = 0$

$$a_0(c(c-1) + c - k^2) = 0 \ , \ (a_0 \neq 0)$$

$$c(c-1) + c - k^2 = 0 \quad , \quad \textbf{(İndis eşitliği)} \qquad (3.26)$$

$$c_1 = k \ , \ c_2 = -k$$

k'nın aldığı değere göre diferansiyel denklemin çözümü aşağıda verilmektedir.

i°) $k \neq 0$ ve kesirli bir sayı ise (3.21) denklemini sağlayan çözüm,

$$y = AJ_k(x) + BJ_{-k}(x) \qquad (3.27)$$

eşitliği ile verilir.

ii°) k=0 ya da tamsayı ise (3.21) denklemini sağlayan çözüm,

$$y = AJ_k(x) + BY_k(x) \qquad (3.28)$$

eşitliği ile verilir. A ve B birer sabittir. (3.27) ve (3.28) eşitliklerinde $\mathbf{J_k(x)}$, k'ıncı mertebe birinci tür Bessel fonksiyonu; $\mathbf{Y_k(x)}$, k'ıncı mertebe ikinci tür Bessel fonksiyonudur. Burada k'nın aldığı değer Bessel fonksiyonunun türünü göstermektedir. x ve k'nın aldığı değere göre $J_k(x)$ ve $Y_k(x)$ fonksiyonlarının sayısal değeri Çizelge 3.1, 3.2 ve Şekil 3.1, 3.2'de verilmektedir. Çözüm için bu çizelge ve grafikler kullanılabilir.

3.3. Modifiye Bessel Eşitliği

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+k^2)y = 0 \quad , \ k \geq 0 \text{ (sabit)} \qquad (3.29)$$

biçiminde verilen değişken katsayılı ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlere **Modifiye Bessel Eşitliği** adı verilir. Bu eşitliklerin de seri biçiminde bir çözümü olduğu kabul edilir ve k'nın aldığı değere göre çözüm;

i°) $k \neq 0$ ve kesirli bir sayı ise

$$y = AI_k(x) + BI_{-k}(x) \qquad (3.30)$$

ii°) k=0 ya da tamsayı ise

$$y = AI_k(x) + BK_k(x) \qquad (3.31)$$

eşitlikleri ile verilir. A ve B birer sabittir. (3.30) ve (3.31) eşitliklerindeki $\mathbf{I_k(x)}$, k'ıncı mertebe birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu; $\mathbf{K_k(x)}$, k'ıncı mertebe ikinci tür Modifiye Bessel fonksiyonudur. x ve k'nın aldığı değere göre $I_k(x)$ ve $K_k(x)$ fonksiyonlarının değeri Çizelge 3.1, 3.2 ya da Şekil 3.1, 3.2'den bulunabilir.