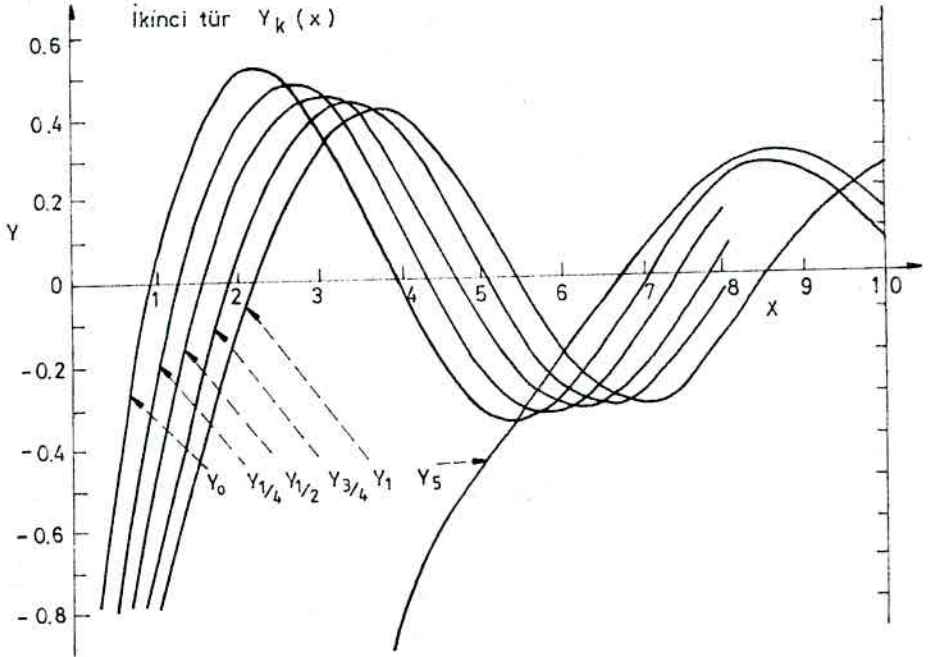
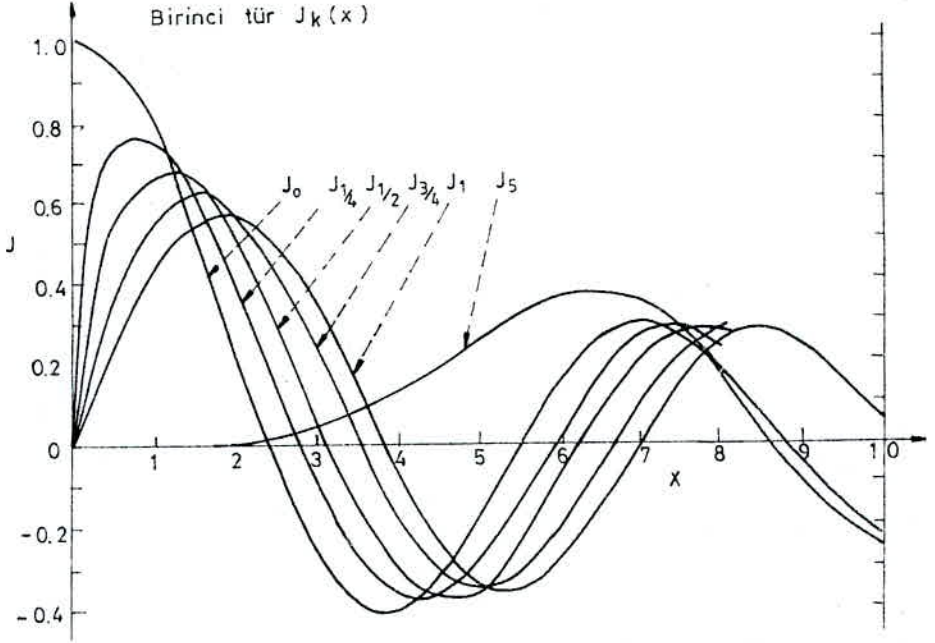


Çizelge 3.1: Sıfırıncı ve birinci mertebe, birinci ve ikinci tür Bessel ve Modifiye Bessel fonksiyonlarının sayısal değerleri.

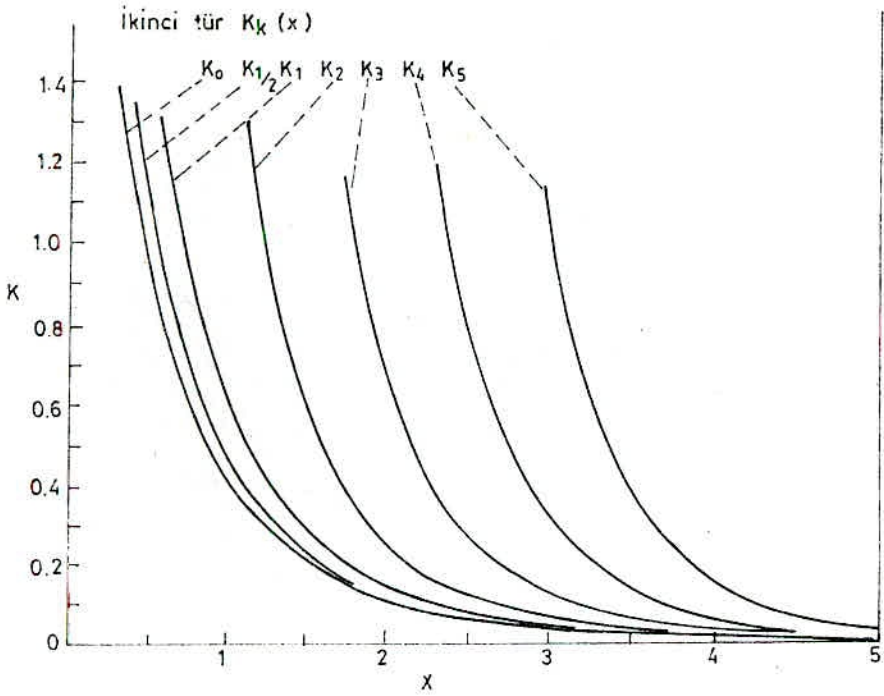
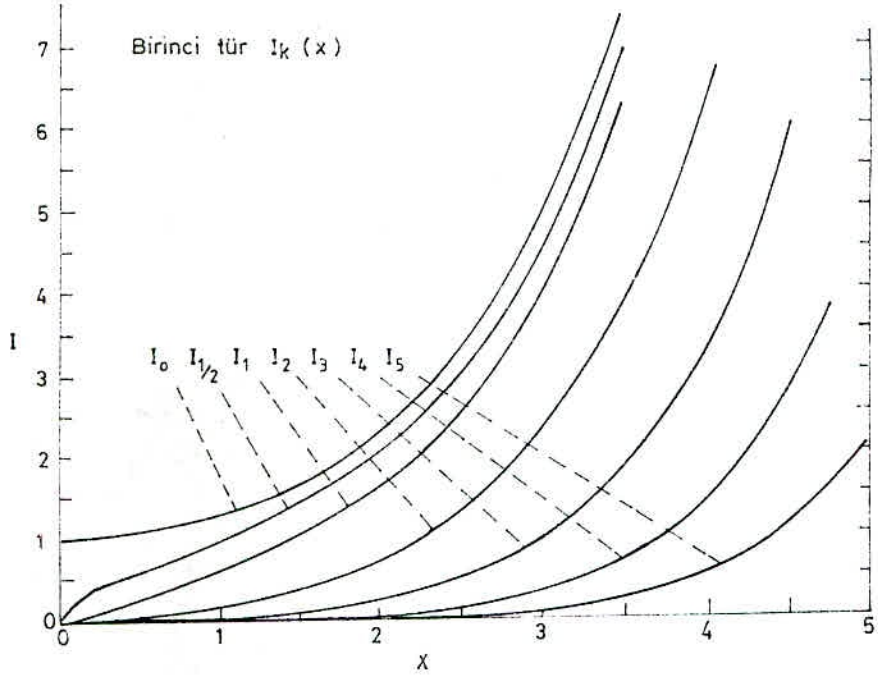
x	$J_0(x)$	$Y_0(x)$	$I_0(x)$	$K_0(x)$
0.0	1.0000	$-\infty$	1.000	$\infty$
0.5	0.9385	-0.4445	1.0635	0.92440
1.0	0.7652	+0.0883	1.2661	0.42100
1.5	0.5118	0.3824	1.6467	0.21380
2.0	0.2239	0.5104	2.2800	0.11390
2.5	-0.0484	0.4981	3.2900	0.06235
3.0	-0.2601	0.3769	4.8810	0.03474
3.5	-0.3801	0.1890	7.3780	0.01960
4.0	-0.3971	-0.0169	11.3020	0.01116
4.5	-0.3205	-0.1947	17.4800	0.00640
5.0	-0.1776	-0.3085	27.2400	0.00369
5.5	-0.0068	-0.3395	42.6900	
6.0	+0.1506	-0.2882	67.2300	
6.5	0.2601	-0.1732	106.2900	
7.0	0.3001	-0.0259	168.6000	
7.5	0.2663	+0.1173	268.2000	
8.0	0.1717	0.2235	427.6000	
8.5	0.0419	0.2702	683.2000	
9.0	-0.0903	0.2499	1093.6000	
9.5	-0.1939	0.1712	1753.0000	
10.0	-0.2459	0.0557		

Çizelge 3.1: Sıfırıncı ve birinci mertebe, birinci ve ikinci tür Bessel ve Modifiye Bessel fonksiyonlarının sayısal değerleri.

x	$J_0(x)$	$Y_0(x)$	$I_0(x)$	$K_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_1(x)$	$I_1(x)$	$K_1(x)$
0.0	1.000	$-\infty$	1.000	$\infty$	0.000	$-\infty$	0.000	$\infty$
0.2	0.990	-1.081	1.010	1.753	0.100	-3.324	0.101	4.776
0.4	0.960	-0.606	1.040	1.115	0.196	-1.781	0.204	2.184
0.6	0.912	-0.309	1.092	0.778	0.287	-1.260	0.314	1.303
0.8	0.846	-0.087	1.187	0.565	0.369	-0.978	0.433	0.862
1.0	0.765	0.088	1.266	0.421	0.440	-0.781	0.565	0.802
1.2	0.671	0.228	1.394	0.319	0.498	-0.621	0.715	0.435
1.4	0.567	0.338	1.553	0.244	0.542	-0.489	0.886	0.321
1.6	0.455	0.420	1.750	0.188	0.570	-0.348	1.085	0.241
1.8	0.340	0.477	1.990	0.146	0.582	-0.224	1.317	0.183
2.0	0.224	0.510	2.280	0.114	0.577	-0.107	1.591	0.140
2.2	0.110	0.521	2.629	0.089	0.556	0.002	1.914	0.108
2.4	0.003	0.510	3.049	0.070	0.520	0.101	2.298	0.084
2.6	-0.097	0.481	3.553	0.055	0.471	0.188	2.755	0.065
2.8	-0.185	0.436	4.157	0.044	0.410	0.264	3.301	0.051
3.0	-0.260	0.377	4.881	0.035	0.339	0.325	3.953	0.040
3.2	-0.320	0.307	5.747	0.028	0.261	0.371	4.734	0.032
3.4	-0.364	0.230	6.785	0.022	0.179	0.401	5.670	0.025
3.6	-0.392	0.148	8.028	0.018	0.095	0.415	6.793	0.020
3.8	-0.403	0.065	9.517	0.014	0.013	0.414	8.140	0.016
4.0	-0.397	-0.017	11.300	0.011	-0.066	0.398	9.759	0.012



Şekil 3.1. Bessel Fonksiyonları



Şekil 3.2. Modifiye Bessel Fonksiyonları

### Bessel Fonksiyonlarının Özellikleri :

1. Bessel fonksiyonlarının orijin ( $x=0$ ) civarındaki değeri;

$$\begin{aligned} k=0 \text{ iken} & \quad J_0(0) = I_0(0) = 1 \\ k>0 \text{ iken} & \quad J_k(0) = I_k(0) = 0 \\ & \quad J_{-k}(0) = \pm I_{-k}(0) = \pm \infty \\ \text{Tüm } k \text{ değerleri için} & \quad -Y_k(0) = K_k(0) = \infty \end{aligned}$$

2. Bessel fonksiyonlarının  $x$ 'in çok büyük değerleri için aldığı değer ( $x \rightarrow \infty$  iken);

$$J_k(x) \cong \sqrt{2/\pi x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$Y_k(x) \cong \sqrt{2/\pi x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$I_k(x) \cong e^x / \sqrt{2/\pi x}$$

$$K_k(x) \cong e^{-x} / \sqrt{2/\pi x}$$

3. Diferansiyel özellikler

$$x \frac{d}{dx} J_k(\alpha x) = k J_k(\alpha x) - \alpha x J_{k+1}(\alpha x) = \alpha x J_{k-1}(\alpha x) - k J_k(\alpha x)$$

$$x \frac{d}{dx} Y_k(\alpha x) = k Y_k(\alpha x) - \alpha x Y_{k+1}(\alpha x) = \alpha x Y_{k-1}(\alpha x) - k Y_k(\alpha x)$$

$$x \frac{d}{dx} I_k(\alpha x) = k I_k(\alpha x) + \alpha x I_{k+1}(\alpha x) = \alpha x I_{k-1}(\alpha x) - k I_k(\alpha x)$$

$$x \frac{d}{dx} K_k(\alpha x) = k K_k(\alpha x) - \alpha x K_{k+1}(\alpha x) = -\alpha x K_{k-1}(\alpha x) - k K_k(\alpha x)$$

4. İntegral özellikleri

$$\int \alpha x^k J_{k-1}(\alpha x) dx = x^k J_k(\alpha x) \quad , \quad \int \alpha x^k I_{k-1}(\alpha x) dx = x^k I_k(\alpha x)$$

$$\int \alpha x^k Y_{k-1}(\alpha x) dx = x^k Y_k(\alpha x) \quad , \quad \int \alpha x^k K_{k-1}(\alpha x) dx = x^k K_k(\alpha x)$$

5. Negatif mertebeli Bessel fonksiyonları ( $k$ : tamsayı)

$$\alpha x J_{k-1}(\alpha x) = 2k J_k(\alpha x) - \alpha x J_{k+1}(\alpha x)$$

$$J_{-k}(\alpha x) = (-1)^k J_k(\alpha x) \quad , \quad I_{-k}(\alpha x) = I_k(\alpha x)$$

$$Y_{-k}(\alpha x) = (-1)^k Y_k(\alpha x) \quad , \quad K_{-k}(\alpha x) = K_k(\alpha x)$$

## 6. 1/2. mertebeden Bessel fonksiyonları

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x \quad , \quad I_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sinh x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos x \quad , \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cosh x$$

## 3.4. Genelleştirilmiş Bessel Eşitliği

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x(a+2bx^r) \frac{dy}{dx} + [c+dx^{2s}-b(1-a-r)x^r+b^2x^{2r}] y = 0 \quad (3.32)$$

olarak verilen genel değişken katsayılı ikinci mertebe adi diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = x^{(1-a)/2} \cdot e^{-bx^r/r} \left[ c_1 Z_k \left( \frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s \right) + c_2 Z_{-k} \left( \frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s \right) \right] \quad (3.33)$$

şeklinde verilir. Burada k denklemin mertebesidir.

$$k = \frac{1}{s} \sqrt{\left( \frac{1-a}{2} \right)^2 - c} \quad (3.34)$$

i°)  $\sqrt{d}/s$  gerçek sayı ise;

a) k kesirli ve pozitif bir sayı ise  $Z_k = J_k$  ve  $Z_{-k} = J_{-k}$

b) k=0 ya da tamsayı ise  $Z_k = J_k$  ve  $Z_{-k} = Y_k$  'dir.

ii°)  $\sqrt{d}/s$  sanal sayı ise;

a) k kesirli ve pozitif ise  $Z_k = I_k$  ve  $Z_{-k} = I_{-k}$

b) k=0 ya da tamsayı ise  $Z_k = I_k$  ve  $Z_{-k} = K_k$  'dir.

**Örnek 3.6 :** Aşağıdaki diferansiyel denklemleri genelleştirilmiş Bessel denkleminde yararlanarak çözünüz.

a)  $xy'' + 2y' + xy = 0$

b)  $xy'' + y' - 2xy = 0$

c)  $x^2 y'' + y' + [x^2 - (1/4)]y = 0$

**Çözüm :**

$$a) \quad x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

denkleminin her iki tarafı  $x$  ile çarpılırsa,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + x^2y = 0 \quad (a1)$$

elde edilir. Bu denklem, (3.32) eşitliği ile verilen

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x(a+2bx^r) \frac{dy}{dx} + [c+dx^{2s}-b(1-a-r)x^r+b^2x^{2r}] y = 0 \quad (a2)$$

genelleştirilmiş Bessel denklemi ile karşılaştırılır ve her terimin katsayısı birbirine eşitlenir. Buradan bulunan  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $r$  ve  $s$  değerleri (3.33) eşitliği ile verilen

$$y = x^{(1-a)/2} \cdot e^{-bx^r/r} \left[ c_1 Z_k \left( \frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s \right) + c_2 Z_{-k} \left( \frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s \right) \right] \quad (a3)$$

genel çözüm eşitliğinde yerine konur. Denklemnin mertebesi  $k$  ise daha önce verilen

$$k = \frac{1}{s} \sqrt{\left( \frac{1-a}{2} \right)^2 - c} \quad (a4)$$

eşitliğinden hesaplanır. Buraya kadar anlatılan işlemlerin uygulaması aşağıdadır.

(a1) ve (a2) eşitliklerinden ikinci türeve ait katsayıların birbirine eşit olduğu görülmektedir. Birinci türeve ait katsayılardan,

$$\begin{aligned} 2x &= x(a+2bx^r) \\ 2 &= (a+2bx^r) \end{aligned}$$

yazılır ve  $a=2$ ,  $b=0$  bulunur. Bu durumda  $r$  için birşey söylenemez.  $y$ 'nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$\begin{aligned} x^2 &= [c+dx^{2s}-b(1-a-r)x^r+b^2x^{2r}] \quad , \quad (b=0) \\ x^2 &= c+dx^{2s} \end{aligned}$$

olur. Buradan da  $c=0$ ,  $d=1$  ve  $s=1$  bulunur. Bu değerler (a3)'te yerine konularak verilen diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = x^{-1/2} [ C_1 Z_k(x) + C_2 Z_{-k}(x) ] \quad (a5)$$

olarak elde edilir. Denklemin mertebesi k (a4) eşitliğinden hesaplanırsa,

$$k = \frac{1}{1} \sqrt{\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 - 0} = 1/2 \quad (\text{kesirli sayı})$$

bulunur.  $\sqrt{d}/s$  'nin değerine göre Z belirlenirse,

$$\sqrt{d}/s = \sqrt{1}/1 = 1, \quad (\text{gerçek ve tamsayı})$$

olduğundan  $Z_k = J_k$  ve  $Z_{-k} = J_{-k}$ 'dir. Buna göre (a5) eşitliğinden çözüm,

$$y = x^{-1/2} [ C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) ]$$

olur ve 1/2. mertebeden Bessel fonksiyonlarının özelliklerinden,

$$y = x^{-1/2} [ C_1 \sqrt{2/\pi x} \sin x + C_2 \sqrt{2/\pi x} \cos x ] \quad (a6)$$

elde edilir.

$$b) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

denkleminin her iki tarafı x ile çarpılır ve (3.32) eşitliği ile karşılaştırılırsa;

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 2x^2 y = 0 \quad (b1)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x (a+2bx^r) \frac{dy}{dx} + [c+dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2 x^{2r}] y = 0 \quad (b2)$$

$$x = x(a+2bx^r)$$

$$1 = (a+2bx^r) \quad a=1, \quad b=0$$

$$-2x^2 = c+dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2 x^{2r}, \quad (b=0)$$

$$-2x^2 = c+dx^{2s} \quad c=0, \quad d=-2, \quad s=1$$

bulunur. (3.33) eşitliğinden;