ASTROİSTATİSTİK
8. KONU

Hazırlayan: Doç. Dr. Tolgahan KILIÇOĞLU

8. BELİRSİZLİĞİN YAYILMASI

Astronomide (ve elbette diğer bilim dallarında) bazı formüller kullanarak hesaplamalar yaparız. Bu formüller bazı değişkenler içerirler. Örneğin, aşağıda Newton'un çekim yasasının ifadesi bulunmaktadır:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$

Burada F iki cisim arasındaki çekim kuvveti, G Newton'un evrensel çekim sabiti, m_1 ve m_2 cisimlerin kütleleleri, d ise iki cisim arasındaki uzaklıktır. Burada m_1 , m_2 ve d değişkenlerinin ölçümler sonucunda elde edildiğini düşünelim. Ölçülerek elde edilen değerler kesin doğru olamazlar ve her zaman bir belirsizliğe sahiptirler. Örneğin $m_1 = 2.3 \pm 0.3 M_\odot$ olarak ifade edildiğinde m_1 değerinin gerçek değerinin 2.0 ile $2.6 M_\odot$ arasında olması gerektiği anlaşılır. Benzer şekilde m_2 ve d değerlerinin de belirsizlikleri bulunmaktadır. Bu durumda yukarıdaki ifadede F kuvveti hesaplandığında onun da bir belirsizliği olacaktır. Bu belirsizlik diğer üç değişkenin belirsizliklerinin birleşiminden kaynaklanmaktadır. Bu durum **belirsizliğin yayılması** olarak adlandırılır.

Bu bölümde belirsizlikleri bilinen bağımsız değişkenler kullanılarak hesaplanan bağımlı bir değişkenin belirsizliğinin nasıl belirlenebileceğini göreceğiz.

8.1 Belirsizliğin Yayılması için Genel İfade

Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu x , y ve z bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. x , y , z ve f 'nin belirsizliklerini σ_x , σ_y , σ_z ve σ_f ile gösterelim. Burada σ_f belirsizliği de diğer bağımsız değişkenlerin belirsizliğine bağlı olacağından $\sigma_f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ şeklinde yazılabilir. σ_f 'in değeri aşağıdaki ifade ile hesaplanır:

$$\sigma_f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2}$$

Görüldüğü üzere bir fonksiyonun alacağı değerin belirsizliği, hesaplandığı bağımsız değişkenlerin belirsizliklerinin karelerinin toplamının karekökü ile ilişkilidir. Karelerin toplamının karekökünün alınması işlemine matematikte kuadratür toplama işlemi denir. İfadede ayrıca belirsizliklerin parçalı türev içeren çarpanlar içerdikleri görülmektedir.

8.2 Toplama ve Çıkarma İçin Belirsizliğin Yayılması

Aşağıdaki gibi bir eşitlik tanımlayalım:

$$f(x,y,z)=ax+by-cz$$

Burada a, b ve c değerleri sabit olsun ve belirsizlikleri bulunmasın. x , y ve z değerleri ise ölçümler sonucunda elde ettiğimiz bağımsız değişkenler olsun. Şimdi bağımsız değişkenler kullanılarak yukarıdaki ifadeden f 'nin değeri hesaplandığında bu değerin belirsizliğinin ne olması gerektiğini adım adım bulalım.

i) Bağımsız değişkenleri sıralayalım: x , y ve z

ii) Fonksiyonun her bağımsız değer için parçalı türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=b$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-c$$

iii) Belirsizliğin yayılması için verdiğimiz genel ifadeye bulduğumuz parçalı türevlerin sonuçları yerleştirilirse;

$$\sigma_f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2}$$ olduğuna göre,

$$\sigma_f=\sqrt{(a\sigma_x)^2+(b\sigma_y)^2+(c\sigma_z)^2}$$

ifadesi elde edilir. Burada c katsayısı kare alma işleminin içinde bulunduğundan işaretinin eksi veya artı olması önemli değildir. Bu nedenle eksi işareti yazılmamıştır. Görüldüğü gibi toplama/çıkarma işlemi yapıldığında sonucun belirsizliğinin bulunması için bağımsız değişkenlerin belirsizlikleri önce bağımsız değişkeniin çarpanıyla çarpılmakta ve daha sonra kudaratür toplamları alınmaktadır.

Örnek 8.1 560 ± 30 Ω ve 1000 ± 40 Ω olan iki direnç birbirine seri olarak bağlandığında elde edilen toplam direncin kaç Ω olduğunu belirsizliği ile beraber elde ediniz.

Cevap 8.1 Birbirlerine seri bağlı olan iki direncin toplam değeri iki direncin değerinin toplamıdır. Bu durumda toplam direnç;

$$R_T=R_1+R_2=560+1000=1560\ \Omega$$

olarak elde edilir. Şimdi bulduğumuz bu değerin belirsizliğini belirleyelim. Soruda $\sigma_{R1}=20$ ve $\sigma_{R2}=10$ olarak verilmektedir. Toplama (veya çıkartma) işlemi için elde ettiğimiz belirsizliğin yayılması ifadesini bu sorudaki değişkenler için yazarsak;

$$\sigma_T=\sqrt{(\sigma_{R1})^2+(\sigma_{R2})^2}$$

olduğu görülür. Buradan;

$$\sigma_T=\sqrt{30^2+40^2}=50$$

olarak elde edilir. Bu durumda elde ettiğimiz toplam direnç belirsizliği ile birlikte

$$R_T=1560\pm 50\ \Omega$$

olarak ifade edilebilir.

8.3 Çarpma ve Bölme İçin Belirsizliğin Yayılması

Aşağıdaki gibi yeni bir eşitlik tanımlayalım:

$$f(x,y,z)=\frac{axy}{bz}$$

Burada a ve b yine belirsizlikleri olmayan sabitler, x , y ve z değerleri ise ölçümler sonucunda elde ettiğimiz bağımsız değişkenler olsun. Şimdi bağımsız değişkenler kullanılarak yukarıdaki ifadeden f 'nin değeri hesaplandığında bu değerin belirsizliğinin ne olması gerektiğini yine adım adım bulalım.

i) Bağımsız değişkenleri sıralayalım: x , y ve z

ii) Fonksiyonun her bağımsız değer için parçalı türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{ay}{bz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{ax}{bz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{axy}{bz^2}$$

iii) Belirsizliğin yayılması için verdiğimiz genel ifadeye bulduğumuz parçalı türevlerin sonuçları yerleştirilirse;

$$\sigma_f=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x)^2+(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y)^2+(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z)^2}$$ olduğuna göre,

$$\sigma_f=\sqrt{(\frac{ay}{bz}\sigma_x)^2+(\frac{ax}{bz}\sigma_y)^2+(\frac{axy}{bz^2}\sigma_z)^2}$$

olarak elde ederiz. Oldukça karmaşık bir ifade gibi gözüküyor ama aslında değil. Şimdi eşitliğin her iki tarafını da fonksiyonun kendisine bölelim;

$$\frac{\sigma_f}{|f|}=\sqrt{\left(\frac{\frac{ay}{bz}\sigma_x}{\frac{axy}{bz}}\right)^2+\left(\frac{\frac{ax}{bz}\sigma_y}{\frac{axy}{bz}}\right)^2+\left(\frac{\frac{axy}{bz^2}\sigma_z}{\frac{axy}{bz}}\right)^2}$$

Yukarıdaki ifadede kare ve karekök alma işlemi olmasına karşın bölme işlemi doğrudan paydalara yazılmıştır. Bunun yapılıp yapılamayacağının gösterimini size bırakıyoruz. Yukarıda sadeleştirmeler yapılırsa sonuç olarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{\sigma_f}{|f|}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$$

olduğu görülür. Burada $\frac{\sigma_f}{|f|}$, $\frac{\sigma_x}{|x|}$, $\frac{\sigma_y}{|y|}$ ve $\frac{\sigma_z}{|z|}$ ifadelerine oransal belirsizlik adı verilir. Görüldüğü gibi çarpma veya bölme işlemleri söz konusu olduğunda sabitlerin bir önemi kalmamakta ve oransal belirsizliklerin kuadratür toplamı alınarak sonucun oransal belirsizliği belirlenmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta sonucun belirsizliğin sadece bağımsız değişkenlerin belirsizliklerine değil aynı zamanda onların değerlerine de bağlı olmasıdır (toplama veya çıkarma işlemlerinde böyle bir durumun olmadığına dikkat ediniz).

Örnek 8.2 Kütleçekimsel potansiyel enerji aşağıdaki ifade ile hesaplanmaktadır:

$$U=\frac{-Gm_1m_2}{d}$$

Birinci ve ikinci cismin kütleleri $m_1=(6.2\pm0.5)\cdot10^{30}$ kg ve $m_2=(9.8\pm0.6)\cdot10^{30}$ kg olarak verilmektedir. Cisimler arası uzaklık ise $d=(1.5\pm0.2)\cdot10^{12}$ m olduğuna göre kütleçekimsel potansiyel enerjiyi belirsizliğiyle birlikte hesaplayınız ($G=6.67\cdot10^{-11}$ $\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$ alınız ve belirsizliğini ihmal ediniz).

Cevap 8.2 Öncelikle potansiyel enerjinin değerini hesaplayalım;

$$U=\frac{-Gm_1m_2}{d}=\frac{-6.67\cdot10^{-11}\cdot6.2\cdot10^{30}\cdot9.8\pm10^{30}}{1.5\cdot10^{12}}=-2.7\cdot10^{39}\ \mathrm{J}$$

Şimdi bu değerin belirsizliğini hesaplayalım. Çarpma ve bölme işlemlerinde belirsizliğin yayılması için elde ettiğimiz ifadeyi bu formüle uyarlarsak;

$$\frac{\sigma_U}{|U|}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_1}}{m_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{m_2}}{m_2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi parantez içerisindeki ifadeleri hesaplayalım;

$$\frac{\sigma_{m_1}}{m_1}=\frac{0.5\cdot 10^{30}}{6.2\cdot 10^{30}}=0.0806$$

$$\frac{\sigma_{m_2}}{m_2}=\frac{0.6\cdot 10^{30}}{9.8\cdot 10^{30}}=0.0612$$

$$\frac{\sigma_d}{d}=\frac{0.2\cdot 10^{12}}{1.5\cdot 10^{12}}=0.1333$$

Ayrıca $U=-2.7\cdot 10^{39}$ olduğunu da yukarıda yaptığımız hesaplamadan yazabiliriz. Tüm bu değerlerin belirsizliğin yayılması ifadesine yerleştirirsek;

$$\frac{\sigma_U}{|-2.7\cdot 10^{39}|}=\sqrt{(0.0806)^2+(0.0612)^2+(0.1333)^2}$$

$$\sigma_U=4.5204\cdot 10^{38}$$

olarak elde edilir. Ancak, belirsizlik değerlerinin ilk anlamlı hanesinden sonraki hanelerinin sunulması pek bir şey ifade etmez. Bu nedenle belirsizlik değerleri ilk anlamlı değerin olduğu haneye kadar yuvarlanır. Yani $\sigma_U=5\cdot 10^{38}$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde elde edilen sonuç da aynı haneye kadar yuvarlanmalıdır. Bu durumda kütleçekimsel potansiyel enerji belirsizliği ile birlikte;

$U=-2.7\cdot 10^{39}\pm 5\cdot 10^{38}\,J$ veya daha doğru bir gösterimle;

$$U=(-2.7\pm 0.5)\cdot 10^{39}\,J$$

olarak yazılabilir.

8.4 Doğal Logaritma İçin Belirsizliğin Yayılması

Tanımlamalar önceki bölümdekilere benzer olmak üzere;

$f(x)=a\ln(bx)$ olsun.

i) Bağımsız değişken: x

ii) Parçalı türev (burada aslında tek değişken olduğundan normal türev de denilebilir):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{a}{x}$$

iii) Belirsizliğin yayılması için ifade;

$\sigma_f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2}$ olduğuna göre buradan

$\sigma_f=|\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x|$ olur ve psrçalı türev yerine yazılırsa;

$\sigma_f=|a\frac{\sigma_x}{x}|$ olarak elde edilir.

Burada ilginç bir durum x 'in oransal belirsizliğinin f 'in oransal olmayan belirsizliği ile ilişkili çıkmasıdır. Logaritmalı ifadelerde bu durumun ortaya çıkması gayet doğaldır.

8.5 Logaritma İçin Belirsizliğin Yayılması

$f(x)=a\log(bx)$ gibi bir eşitlik tanımladığımızda belirsizlik hesabında doğal logaritmadan olan tek farkı parçalı türev olacaktır:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{a}{x\ln(10)}$$

Bu durumda f 'nin belirsizliği aşağıdaki ifadede verildiği gibi olur:

$\sigma_f=|a\frac{\sigma_x}{x\ln(10)}|$ veya $\sigma_f=|0.434\cdot a\frac{\sigma_x}{x}|$

Örnek 8.3 Astronomide uzaklık modülü ($m-M$) aşağıdaki formül ile hesaplanmaktadır:

$$m-M=5\log d-5$$

Burada d parsek cinsinden yıldızın uzaklığıdır. Buna göre bir yıldızın uzaklığı $d=25\pm5$ pc olarak biliniyorsa uzaklık modülünü ($m-M$) belirsizliğiyle birlikte hesaplayınız.

Cevap 8.3 Öncelikle uzaklık modülünün değerini hesaplayalım.

$$m-M=5\log 25-5=1^m.9897$$

Şimdi de elde ettiğimiz bu sonucun belirsizliğini belirleyelim. Formül incelendiğinde sol tarafta yer alan logaritmalı ifadeden 5 çıkarıldığı görülmektedir. Ancak, türev alındığında bu –5 sayısı yok olacağından logaritma için elde ettiğimiz belirsizliğin yayılması ifadesi bu formül için de aynı şekilde kullanılabilir. Logaritmanın çarpanı (5) ise a sabitine karşılık gelir ve hesaplamalara katılması gerekir. Logaritma için belirsizliğin yayılması ifadesini bu örneğe uyarlarsak;

$$\sigma_{(m-M)} = |a \frac{\sigma_d}{d \ln(10)}|$$

olduğu görülecektir. Bu durumda $a=5$ $d=25$ ve $\sigma_d=5$ değerleri ifadede yerine konursa;

$$\sigma_{(m-M)} = |\frac{5 \cdot 5}{25 \ln(10)}| = 0.4343$$

olarak elde edilir. Bu durumda uzaklık modülünün değerini belirsizliği birlikte;

$$m-M = 1^m.9897 \pm 0.4343$$

şeklinde yazılabilir. Ancak bu gösterim doğru değildir. Çünkü, belirsizliğin ilk anlamlı hanesi (bu örnekte noktadan sonraki ilk hane) sonrasında gelen haneler bir anlam ifade etmez. Bu nedenle değerlerin yuvarlanarak aşağıdaki şekilde verilmesi gerekir:

$$m-M = 2^m.0 \pm 0.4$$

8.6 Euler (e) Sayısı Üzeri İfadelerde Belirsizliğin Yayılması

Tanımlamalar önceki bölümdekilere benzer olmak üzere;

$f(x) = ae^{bx}$ olsun.

i) Bağımsız değişken: x

ii) Parçalı türev (burada yine tek değişken olduğundan normal türev de denilebilir):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = abe^{bx}$$

iii) Belirsizliğin yayılması için ifade;

$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x\right)^2}$ olduğuna göre buradan yine

$\sigma_f = |\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x|$ olur ve

$\sigma_f = |abe^{bx} \sigma_x|$ olarak elde edilir.

Yine eşitliğin her iki tarafını da f 'in kendisine bölersek;

$\frac{\sigma_f}{|f|} = |\frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} \sigma_x|$ ve buradan,

$$\frac{\sigma_f}{|f|}=|b\,\sigma_x|$$

Burada karşımıza çıkan durum logaritma için geçerli olan durumun bir anlamda tersidir. f 'in oransal belirsizliği x 'in oransal <u>olmayan</u> belirsizliği ile ilişkilidir.

Örnek 8.4 Bir ortama giren ışınımın şiddeti ortamın içerisinde saçılma olması nedeniyle ortamdan çıktığında azalacaktır (veya sıfır olacak ve ortamdan geçemeyecektir). Astrofizikte bir ortama giren ışınımın (I_0) o ortamdan çıkan ışınım (I) ile ilişkisi ifade ile verilmektedir:

$$I=I_0\cdot e^{-\tau}$$

Burada $I_0=1000\ \mathrm{W\,m^{-2}}$ olduğu durum için $\tau=0.6\pm0.1$ olarak verildiğinde I 'nın değerini belirsizliğiyle birlikte hesaplayınız (I_0 'ın belirsizliğinin olmadığını kabul ediniz).

Cevap 8.4 İlk olarak I değerini hesaplayalım.

$$I=1000\cdot e^{-0.6}=548.8116\ \ \mathrm{W\,m^{-2}}$$

Şimdi de elde ettiğimiz bu sonucun belirsizliğini belirleyelim. Formül için Euler sayısı üzeri ifadeler için elde ettiğimiz belirsizliğin yayılması ifadesi kullanılmalıdır. τ 'nun başında eksi işareti bulunduğundan b sabitinin değeri -1 dir; ancak bu durum mutlak değer alma işleminin bulunmasından dolayı sonucu değiştirmez. Burada Euler sayısı üzeri için elde ettiğimiz belirsizliğin yayılması ifadesini uyarlarsak;

$$\frac{\sigma_I}{|I|}=|b\,\sigma_\tau|$$

elde edilir. $I=548.8116$, $b=-1$ ve $\sigma_\tau=0.1$ değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\frac{\sigma_I}{548.8116}=|-1\cdot0.1|$$

$$\sigma_I=54.8812$$

olarak bulunur. Bu durumda I 'nın değerini belirsizliğiyle birlikte;

$$I=548.8116\pm54.8812\ \mathrm{W\,m^{2}}$$

olarak elde edilir. Ancak, bu gösterim yine yanlıştır. Belirsizliğin ilk anlamlı hanesine kadar yuvarlama yapılarsa;

$$I=550\pm50\ \ \mathrm{W\,m^{2}}$$

ifadesi anlamlı değerleri içeren doğru bir ifade olur.

8.7 Üstel İfadelerde Belirsizliğin Yayılması

$f(x)=ab^{cx}$ gibi bir eşitlik tanımladığımızda e üzeri ifade için yaptığımız belirsizlik hesabından tek fark parçalı türev olacaktır:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(b)\,cab^{cx}$$

Bu durumda f 'nin belirsizliği aşağıdaki ifadede verildiği gibi olur:

$$\frac{\sigma_f}{|f|}=|c\ln(b)\,\sigma_x|$$

Soru 8.1 Şimdi öğrendiğiniz bilgileri kullanarak konunun başındaki $F=\frac{Gm_1 m_2}{d^2}$ ifadesinde F 'nin belirsizliğinin nasıl hesaplanması gerektiğini bulmaya çalışınız.