**ASTROİSTATİSTİK**

9. KONU

Hazırlayan: Doç. Dr. Tolgahan KILIÇOĞLU

# 9. OLASILIK HESABI

Ortaya çıkacağı önceden kesin olarak bilinmeyen olayların gerçekleşmesinin ne derece olanaklı olduğunu tahmin etmeye **olasılık hesabı** denir.

## 9.1 Tanımlar

Olasılık konusunu anlatmadan önce istatistikte kullandığımız bazı kavramlara ek olarak birkaç yeni olasılık kavramından söz edelim.

**Yöntem:** Olasılığı hesaplanacak olan olayın içinde bulunduğu eyleme yöntem denir. Örneğin; bir bozuk paranın havaya atılarak yazı veya tura gelmesinin gözlenmesi veya iskambil destesi içerisinden bir kart seçilmesi yönteme örnek olarak verilebilir.

**Olay:** Olasılığı hesaplanmak istenen durumdur. Örneğin, bozuk para atıldığında tura gelmesi veya iskambil destesi içerisinden sinek seçilmesi olaya örnek olarak verilebilir.

**Örneklem Uzayı:** Bir yöntemin sonucunda ortaya çıkabilecek durumların tamamına örneklem uzayı denir. Örneğin bir zar atıldığında örneklem uzayı {1, 2, 3, 4, 5, 6} olur.

**Örneklem Birimi:** Örneklem uzayındaki her bir durum ayrı ayrı bir örneklem birimidir. Örneğin, bir bozuk para atıldığında yazı ve tura ayrı ayrı iki örneklem birimidir.

**Olasılık:** Sıfır ile bir arasında değer alan ve bir olayın gerçekleşip gerçekleşmeyeceğine ilişkin tahmini ifade eden sayıya **olasılık** denir. Bir olayın olasılığının $P=0$ olması olayın gerçekleşme şansının olmadığını belirtir. Olasılığı $P=1$ olan bir olayın ise gerçekleşmesinin kesin olduğu söylenir.

## 9.2 Basit Olasılık

Bir olayın olasığı aşağıdaki gibi basitçe ifade edilebilir:

$$P(\text{olay})=\frac{\text{Örneklem uzayında olayın sağlandığı birimlerin sayısı}}{\text{Örneklem uzayındaki birimlerin sayısı}}$$

**Örnek 9.1** Hilesiz bir zar atıldığında 3 gelme olasılığı nedir?

**Cevap 9.1** Bu sorunun yanıtının kolay olduğunu biliyoruz. Ancak gelin öncelikle soruda yöntem, olay, örneklem uzayı nedir onları belirleyelim ve daha sonra olasılığı hesaplayalım.

Yöntem : Zar atılması.

Olay : Zarın 3 gelmesi.

Örneklem uzayı : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Şimdi olasılığı hesaplayalım. Örneklem uzayında olayın sağlandığı sadece tek bir birim bulunmaktadır. Örneklem uzayında ise toplamda 6 birim bulunur. Bu durumda olasılık;

$$P(\text{zarın 3 gelmesi})=\frac{1}{6}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 9.2** Hilesiz bir zar atıldığında 3 gelmeme olasılığı nedir?

**Cevap 9.2**

Yöntem : Zar atılması.

Olay : Zarın 3 gelmemesi, yani;
{1, 2, 4, 5, 6}

Örneklem uzayı : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Burada artık olayın sağlandığı 5 birim söz konusudur. Bu durumda sonuç;

$$P(\text{zarın 3 gelmemesi})=\frac{5}{6}$$

olarak bulunur.

**Not:** Görüldüğü gibi zarın 3 gelmesi ile gelmemesi olasılıkları toplanırsa:

$$P(\text{zarın 3 gelmesi})+P(\text{zarın 3 gelmemesi})=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

olduğu görülür. Bunun nedeni bu iki durumun dışında olanaklı başka bir örneklem biriminin olmamasıdır.

**Soru 9.1** Bir zar atıldığında gelen sayının 3 veya 3'ten küçük olma olasılığı nedir?

### 9.2.1 Toplam olasılık

Birbirlerinden bağımsız (birbirini kapsamayan) A ve B gibi iki olayın olduğunu düşünelim. Yani, A ve B olayının her ikisinin de sağlandığı örneklem birimleri mevcut olmasın. Eğer A **veya** B'nin en az ve yanlız birinin gerçekleşme olasığı hesaplanmak isteniyorsa bu iki olayın olasılıkları **toplanır**:

$$P(\text{A veya B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$$

Burada A ve B olayları örnek olarak verilmiştir. Olay sayısı ikiden fazla da olabilir. Şimdi toplam olasılığa ilişkin birkaç örnek verelim.

**Örnek 9.3** Bir çift zar atıldığında zarların toplamının 3 veya 8 gelme olasılığı nedir?

**Cevap 9.3**
Yöntem : Bir çift zarın atılması.

Olay 1 : İki zarın toplamının 3 olması. Yani;
{1-2, 2-1}

Olay 2 : İki zarın toplamının 8 olması. Yani;
{2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6-2}

Örneklem uzayı : {1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6}

Bu durumda soruda sorulan olasılık;

$$P(\text{toplamın 3 veya 8 olması}) = P(\text{toplamın 3 olması}) + P(\text{toplamın 8 olması}) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} = \frac{7}{36}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 9.4** Madeni para üç kere atıldığında en az iki kere tura gelmesinin olasığı nedir?

**Cevap 9.4** Burada soru şöyle de sorulabilir: Üç kere para atıldığında iki **veya** üç kere tura gelmesinin olasılığı nedir?

Yöntem : Üç kere para atılması.

Olay 1 : İki kere tura gelmesi. Yani;
{T-T-Y, T-Y-T, Y-T-T}

Olay 2 : Üç kere tura gelmesi. Yani;
{T-T-T}

Örneklem uzayı : {Y-Y-Y, Y-Y-T, Y-T-Y, Y-T-T, T-Y-Y, T-Y-T, T-T-Y, T-T-T}

Bu durumda soruda sorulan olasılık;

$$P(\text{en az iki kere tura gelmesi}) = P(\text{iki kere tura gelmesi}) + P(\text{üç kere tura gelmesi}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

olarak elde edilir.

### 9.2.2 Bileşik olasılık

Yine birbirlerinden bağımsız (birbirini kapsamayan) A ve B gibi iki olayın olduğunu düşünelim (A ve B olayının her ikisinin de sağlandığı örneklem birimleri mevcut olmasın). Eğer A **ve** B′nin her ikisinin birden gerçekleşme olasığı hesaplanmak isteniyorsa bu iki olayın olasılıkları **çarpılır**:

$$P(\text{A ve B}) = P(\text{A}) \cdot P(\text{B})$$

**Örnek 9.5** Bir zar iki defa atıldığında ilkinin 1 ve ikincisinin 6 gelme olasılığı nedir?

**Cevap 9.5**

Yöntem : Bir zarın iki defa atılması.

Olay 1 : İlk zarın 1 gelmesi.

Olay 2 : İkinci zarın 2 gelmesi.

Örneklem uzayı (1. atış) : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Örneklem uzayı (2. atış) : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Her iki atış için de olasılık $\frac{1}{6}$ olduğuna göre soruda sorulan olasılık;

$$P(\text{ilkinin 1 ve ikincinin 6 gelmesi}) = P(\text{ilkinin 1 gelmesi}) \cdot P(\text{ikincinin 6 gelmesi}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 9.6** Üzerinde 1 den 100′e kadar sayıların yazılı olduğu kağıtlar içeren bir torba ile içinde 17 adet beyaz ve 3 adet kırmızı bilye içeren ikinci bir başka torba bulunmaktadır. Torbalardan bir kağıt ve bilye çekildiğinde hem ilk torbadan çekilen sayının 3′e bölünebilir olması hem de ikinci torbadan çekilen bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?

**Cevap 9.6**

Yöntem : İki ayrı torbadan çekiliş yapılması.

Olay 1 : İlk torbadan çekilen sayının 3′e bölünebilir olması.
(100 sayı içerisinde bu koşulu sağlayan 33 sayı bulunmaktadır)

Olay 2 : İkinci torbadan çekilen bilyenin renginin kırmızı olması. (20 bilye içerisinde bu koşulu sağlayan 3 bilye bulunmaktadır)

Örneklem uzayı (1. torba) : {1 den 100'e kadar sayılar}

Örneklem uzayı (2. torba) : {B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, K, K, K}

Birinci torba için olasılık $\frac{33}{100}$ ve ikinci torba için olasılık $\frac{3}{20}$ olduğuna göre soruda sorulan olasılık;

$$P(\text{3'e bölünebilme ve kırmızı olma}) = P(\text{3'e bölünebilme}) \cdot P(\text{kırmızı olma}) = \frac{33}{100} \cdot \frac{3}{20} = \frac{99}{2000}$$

yani yaklaşık %5 olarak elde edilir.

**Örnek 9.7** Bir galaksideki yıldızların %70'inin çift olduğu, %90'ının ise cüce yıldız olduğu tahmin edilmektedir. Bu durumda, ilgili galakside rasgele bir yıldız gözlendiğinde bu yıldızın çift olmamasının ve aynı zamanda cüce <u>olmamasının</u> olasılığını hesaplayınız.

**Cevap 9.7**

Çift olma olasılığı $\frac{70}{100}$ ise çift olmama olasılığı $\frac{30}{100}$ olur.

Cüce olma olasılığı $\frac{90}{100}$ ise cüce olmama olasılığı da $\frac{10}{100}$ olur.

Her iki koşulun da aynı anda sağlanması istendiğinden;

$$P(\text{çift olmama ve cüce olmama}) = P(\text{çift olmama}) \cdot P(\text{cüce olmama}) = \frac{30}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{3}{100}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 9.8** Bir torbada birbirinin aynısı 4 beyaz, 5 yeşil ve 6 kırmızı bilye bulunmaktadır. Torbadan çekilen bir bilye geri torbaya atılmamak üzere çekilen dört bilyenin dördünün de kırmızı çıkma olasılığı nedir?

**Cevap 9.8**

İlk çekişte torbada 15 bilye vardır ve 6'sı kırmızıdır. Yani kırmızı çıkma olasılığı $\frac{6}{15}$ olur.

Benzer şekilde ikinci, üçüncü ve dördüncü çekilişlerde olasılıklar: $\frac{5}{14}$ , $\frac{4}{13}$ ve $\frac{3}{12}$ olur. Bu durumda;

$$P(\text{4 kez kırmızı çekme}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{91}$$ yani yaklaşık %1 olarak elde edilir.

## 9.3 Koşullu Olasılık

Bir yöntem uygulandığında A ve B gibi birbirlerine bağımlı iki olayın ortaya çıktığını düşünelim. Bu durumda, B olayının gerçekleştiği biliniyorsa A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Burada $P(A\cap B)$ birbirlerine bağımlı olan A ve B olaylarının kesişimidir. Bu şekilde oluşan durumlar **koşullu olasılık** olarak adlandırılır.

**Örnek 9.9** Bir madeni para 3 kez atılmıştır. Atışlardan ikisinin yazı geldiği bilindiğine göre diğer atışın tura gelmiş olma olasılığı nedir?

**Cevap 9.9**

Yöntem : 3 kere madeni para atılması.

Olay A : Atışlardan birinin tura gelmesi.

Olay B (Koşul) : Atışlardan en az ikisinin yazı geldiği biliniyor.

Örneklem Uzayı : {Y-Y-Y, Y-Y-T, Y-T-Y, Y-T-T, T-Y-Y, T-Y-T, T-T-Y, T-T-T} veya $2^3 = 8$ farklı durum

Koşulu Sağlayanlar (B) : {Y-Y-Y, Y-Y-T, T-Y-Y, Y-T-Y} olduğundan $P(B)=\frac{4}{8}$

Kesişim uzayı (A ∩ B) : {Y-Y-T, T-Y-Y, Y-T-Y} olduğundan $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

Bu durumda;

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{4}$$ (yani %75'tir).

**Örnek 9.10** Bir çift zar atıldığında zarlardan bir tanesinin 4 geldiği biliniyorsa diğer zarın 2 gelmesi olasılığı nedir?

**Cevap 9.10**

Yöntem : Zar atılması.

Olay A : Zarlardan birinin 2 gelmesi.

Olay B (Koşul) : Zarlardan bir tanesinin 4 geldiği biliniyor.

Örneklem Uzayı : {1-1, 1-2, ... , 6-5, 6-6} toplam $6^2$ = 36 farklı durum

Koşulu Sağlayanlar (B) : {4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6,1-4, 2-4, 3-4, 5-4, 6-4} old. $P(B)=\frac{11}{36}$

Kesişim uzayı (A ∩ B) : {4-2, 2-4} olduğundan $P(A\cap B)=\frac{2}{36}$

Bu durumda;

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{2}{11}$$ (yani yaklaşık %18'tir).

**Örnek 9.11** Bir çiftin farklı yaşlarda iki çocuğu bulunmaktadır. Çocuklarından bir tanesinin kız olduğu bilindiğine göre diğerinin erkek olma olasılığı nedir?

**Cevap 9.11**

Olay A : İki çocuktan birinin erkek olması.

Olay B (Koşul) : İki çocuktan en az birinin kız olduğu biliniyor.

Örneklem Uzayı : {K-K, K-E, E-K , E-E} toplam $2^2$ = 4 farklı durum olabilir.

Koşulu Sağlayanlar (B) : {K-K, K-E, E-K} olduğundan $P(B)=\frac{3}{4}$

Kesişim uzayı (A ∩ B) : {K-E, E-K} olduğundan $P(A\cap B)=\frac{2}{4}$

Bu durumda;

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$ (yani yaklaşık %67'dir).