9 Çizgisel Momentum ve Çarpışmalar

a) Çizgisel Momentum

b) İtme ve Momentum

c) Çarpışmalar

d) Kütle Merkezi

Çizgisel Momentum

Bowling topu büyük bir hızla bir lobuta çarpar, çarpılan lobut havada uçar ve diğer lobutlara çarpar. Lobutların çok kısa sürede büyük yer değiştirmelerine neden olur. Newton un 3ncü yasasına göre çarpışma anında lobut topa karşı bir tepki kuvveti gösterir. Bu tepki kuvveti topun çarpışmadan önceki hareketine zıt yönde ve ivmeli hareketine neden olur. Lobutların *F* ve *a* değerleri çok büyük olmasına rağmen bu değerler zaman içinde değişmektedir. Bu bölümde bu hızlı değişiklikler anlamaya çalışılacaktır. Önce, cisimlerin hareketlerini tanımlamada çok kullanışlı olan *momentum* kavramını anlamaya çalışacağız. Karşı takımlarda olan iki futbolcunun topa doğru hareketlenmelerini düşünün, futbolculardan birisi 70 kilogram diğeri ise 90 kilogram olsun. Futbolculardan birisi diğerine göre topa daha yakın olsun ve her ikiside 5 m/s hızla topla doğru koşsunlar. Topu kazanamayan diğerine faul yaparsa örneğin çarparsa sonuç ne olur? Bu tür konular bu bölümde açıklanmaya çalışılacaktır. *Kütle merkezi* kavramı ile olayların incelenmesi daha kolay olacaktır.

Çizgisel Momentum ve Korunumu

Bundan önceki iki konuda Newton yasaları karmaşık sistemler için kullanıldı. Bazı sistemler korunum yasalarını örneğin enerji korunumu kullanılarak çözüldü. Sürtünmesiz buz zemin üzerindeki 60 kg lık bir okçu 0.5 kg lık oku 50 m/s lik hızla atarsa, Newton un üçüncü yasasına göre yayın oka etkidiği kuvvet kadar okçuya da ters yönde bir kuvvet etki eder. Bundan dolayı okçu bir miktar geriye doğru gider. Bu geriye gitme sürati ne kadar olur? Newton un ikinci yasası veya enerji bilgileri kullanılarak elde edilemez. Elimizde yeterli bilgi yoktur. Fakat çizgisel momentum ile bu problemi çözebiliriz. Kütleleri m_1 ve m_2 ve cisimlerin hızlarını da $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ olarak alalım. Sistem izole edilmişse bir paçacığa etki eden yegane kuvvet Newton yasaları ile ifade edilir. 1 nolu parçacığa etki eden kuvvet (örneğin yerçekimi kuvveti) diğerinede etki eder. Öyleyse bundan farklı bir kuvvet 2 nolu parçacığa etkiyorsa bu kuvvete zıt zönde büyüklüğü aynı olan bir kuvvet 1 nolu parçacığa etki eder : $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Çizgisel Momentum ve Korunumu

Newton un etki-tepki ve hız değişikliği ile ilgili olan kuvvet yasaları kullanılırsa yandaki denklemler elde edilir. Cisimlerin hareketleri esnasında kütlelerinin sabit kaldığını kabul ediyoruz.

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0$$

Son denklemdeki parantez içindeki terim çizgisel momentum eşitliğidir.

Çizgisel momentum

Türev ifadesinde zaman sıfır olarak alınırsa, ya da parantez içindeki terim zamana bağlı olarak değişmiyorsa $m_1 v_1 + m_2 v_2$ kullanılabilir. Sonuç olarak toplam sabittir. *mv* niceliği parçacık için önemlidir. Bu niceliğe *çizgisel momentum* denir.
Kütlesi *m* ve hızı *v* olan bir parçacığın veya bir cismin çizgisel momentumu bu iki terimin çarpımı şeklinde yandaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

Boyut analizi yapılırsa,

$$\mathrm{ML/T}$$

SI birim sistemindeki değeri

$$\mathrm{kg \cdot m/s}$$

Vektör bileşenleri olarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Newton un ikinci yasası ve çizgisel momentum

Newton un hareketle ilgili olan ikinci yasası kullanılırsa bir parçacığın çizgisel momentumu ile parçacığa etki eden kuvvet arasında bir bağıntı kurulabilir. Newton un ikinci yasası ve ivme tanımı birlikte kullanılırsa:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Kütlenin miktarının zamana bağlı olarak değişmediğini kabul ederek aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Bir parçacığın zamana bağlı olarak çizgisel momentumunun değişmesi o parçacık üzerine etki eden net kuvveti tanımlar. Bir roketin itme hareketi F=ma ile açıklanamaz.

Soru

Aynı kinetik enerjisine sahip iki cismin momentumlarının büyüklükleri için ne söylenebilir?

(a) $p_1 < p_2$

(b) $p_1 = p_2$

(c) $p_1 > p_2$

(d) Bir şey söylemek için bu bilgi yetersiz.

$E_1=E_2$ yani $p_1^2 /2m_1 =p_2^2 /2m_2$

Çizgisel momentumun korunumu

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

$$\mathbf{p}_{top} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Yukarıdaki ifadenin zamana bağlı türevi sıfırsa,

$$\mathbf{p}_{top} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{sabit}$$

Yani toplam çizgisel momentum korunuyordur demektir.

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

Son ifade çizgisel momentumun korunumudur.

İki veya daha fazla sayıdaki parçacıktan oluşan izole bir sistemin toplam momentumu korunur, yani zamanla değişmez sabit kalır.

Soru

Bir araba ve kamyon aynı süratte zıt yönlerde gitmekte iken kafa kafaya çarpışırlar ve çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler. Hangi aracın momentumunda büyük değişiklik olur?

(a) Binek araç

(b) Kamyon

(c) Her ikisinin momentumundaki değişim aynıdır

(d) Belirlemek imkansızdır.

İtme ve Momentum

Bir cismin momentumundaki değişimin cisim üzerine bir kuvvet etkidiğini göstermektedir. Momentum zamana bağlı olarak değişiyorsa Newton un ikinci yasasına göre

$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt,$

veya

$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem kuvvetin etkidiği sürece integrali alınırsa yandaki eşitlik elde edilir. Son ifadeyi momentum-impuls teoremi olarak tanımlayabiliriz.

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt$$

Sağdaki ifade Impuls olarak tanımlanır.

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt$$

Impuls – momentum değişimi

Bir parçacık üzerine etki eden **F** kuvvetinin impulsu parçacığın momentumundaki değişime eşittir.

Yukarıdaki ifade ikinci Newton yasasının değişik bir ifadesidir. Impuls vektörel bir niceliktir ve büyüklüğü kuvvet-zaman eğrisinin altında kalan alana eşittir. Zaman aralığı

$\Delta t = t_f - t_i$

ile tanımlanmaktadır. Impuls vektörünün yönü momentumun değişimi vektörü ile aynı doğrultudadır. Impuls un birimi ile momentum aynı boyutlardadır.Yani ML/T (kütle uzunluk / zaman) şeklindedir. Impuls parçacığın bir özelliği değildir. Cisme etki eden kuvvetin cismin momentumundaki değişimini gösterir.

Araba çarpışma testleri

Hava yastıklı araçlarda kaza anında hemen şişen hava yastıkları sayısız hayat kurtarmışlardır.

Şişen hava yastığı kazazadeye etki eden kuvveti yani impulsu azaltır.

Soru

Bir arabada çarpışma esnasında ön konsol, emniyet kemeri ve hava yastığı tarafından ön tarafta oturan bir yolcunun

(a) İmpulsundaki değişimi ve

(b) Üzerine etkiyen ortalama kuvveti

Büyükten küçüğe doğru sıralıyınız.

Araba koruyucu tamponları ne kadar iyidir?

Bir araba çarpma testinde 1 500 kg lık araba duvara çarpmaktadır (Şekil 9.6). Arabanın ilk ve son hızları v_i = -15.0**i** m/s ve v_f = 2.60**i** m/s şeklindedir. Çarpma 0.150 saniye kadar sürmektedir. Çarpmanın neden olduğu impulsu ve arabaya etki eden ortalama kuvveti hesaplayınız.

Örnek 9.4 Araba tamponları ne kadar iyidir?

Çözüm:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s})$$
$$= 2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.50 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

Tek Boyutta Çarpışmalar

Çizgisel momentumun korunumunu iki parçacık çarpışınca neler olabileceğini anlamak için kullanacağız. Çarpma, iki parçacık birbirlerine çok yaklaşarak birbirlerine kuvvet etkimeleri şeklinde kullanılacaktır. Parçacıkların ilk ve son hızları arasındaki değişme süresi çok kısadır. Parçacıkların birbirlerine etkidikleri kuvvet diğer dış kuvvetlerden (kütlesel çekim, elektrik vs.) çok büyük kabul edilir ve impulsu yaklaşık olarak alırız. İki parçacık arasındaki fiziksel kontak iki makroskopik cisim arasında olmaktadır. Mikroskopik düzeyde fiziksel kontak yoktur.

Tek Boyutta Çarpışmalar

Bunu anlayabilmek için atomik düzeyde proton ve alfa (helyum atomunun çekirdeği) parçacıklarının çarpışmalarını dikkate alalım (Şekil 9.7b). Her iki parçacık pozitif elektrik yüklü olduklarından birbirlerine yakınlaşınca birbirlerini statik elektrik alanlarından dolayı kuvvetli bir şekilde iterler. Fiziksel bir kontak olmaz. Kütleleri m_1 ve m_2 iki parçacık çarpışmaktadır (Şekil 9.7). Impuls kuvvetleri Şekil 9.4 teki gibi değişmektedir. Parçacıklar arası etkileşmeler iç kuvvetlerin etkileşmesidir. İki parçacık izole edilmiş durumdadır. Momentum korunmaktadır. **Çarpışmadan önceki toplam momentum ile çarpışmadan sonraki toplam momentum birbirlerine eşittir.**

Elastik çarpışma

Buna karşın, çarpma olayının tipine bağlı olarak parçacıklardan oluşan bir sistemin toplam kinetik enerjisi bazen korunur, bazen de korunmaz. Kinetik enerjinin bu durumuna göre çarpışma elastik veya inelastik çarpışma olarak isimlendirilir.

Elastik çarpışmada iki cisimden birisinin toplam kinetik enerjisi çarpışmadan önce ve sonra aynıdır (yani toplam momentumu değişmez). Bu tür çarpışmalar makroskopik dünyada çoktur. Az da olsa enerji kaybı olmasına rağmen bilardo toplarının çarpışması elastik çarpışmaya örnek verilebilir. Bilardo toplarının çarpışmasında duyduğunuz ses bu enerji kaybından kaynaklanır. Tam elastik çarpışmada ses duyulmaz. Atomik ve alt atomik boyuttaki parçacıklar arasındaki çarpışmalar örnek verilebilir.

İnelastik çarpışma

İnelastik çarpışan cisimler birbirleri ile birleşmez, fakat çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjileri eşit değildir. Plastik bir topun sert bir yüzeye çarpması bu tür bir inelastik çarpışmaya örnek verilebilir. Plastik top çarpışma esnasında biraz şekil değiştirir. Kinetik enerjideki farklılık bu şekil değiştirme için harcanır. Sistemin kinetik enerjisi korunmaz. Enejinin bir kısmı iç enerji olarak cisim içinde dağılırken bir kısmıda ses olarak dağılır. Elastik ve gerçek inelastik çarpışma nadiren görülen olaylardır. Günlük hayatta karşılaştığımız çarpışma olaylarının çoğu bu iki tip arasındadır. Çarpışmaları ayırt etmek için en uygun yol momentumun korunup korunmadığına bakmaktır.

Elastik çarpışma

Eğer m_1 in kütlesi m_2 den çok büyük ve $v_{2i} = 0$ ise, yukarıdaki denklemlerden $v_{1f} \approx v_{1i}$ ve $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ bulunur . Bunun anlamı çok ağır bir kütle çok hafif bir kütle ile kafa kafaya çarpışırsa ağır kütle hareketinde bir değişiklik olmadan ilerlemeye devam eder, hafif kütle ise ağır kütlenin ilk süratini iki katına çıkar demektir. Ağır bir atomun hafif bir atomla örneğin uranyum atomunun hidrojen atomu ile çarpışması verilebilir.

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

Eğer m_2 kütlesi m_1 den çok büyük ve 2 nolu parçacık çarpışmadan önce durgun ise çarpışmadan sonra $v_{1f} \approx -v_{1i}$ ve $V_{2f} = 0$ olur. Bunun anlamı hafif bir parçacık başlangıçta durgun olan ağır bir parçacıkla kafa kafaya çarpışırsa hafif kütle geldiği yönün tam tersi yönünde aynı süratle hareket ederken ağır kütle yine hareketsiz kalır.

Çarpışan çelik küreler

Çarpışma elastik ise böyle bir olay oluşmaz. Çarpışmadan önceki momentum mv dir. Buradaki m çelik topun kütlesi, v ise 1 nolu topun süratidir.Çarpışmadan sonra her birinin kütlesi m olan iki topun v/2 sürati ile hareket edip etmeyeceklerini tahmin etmeye çalışıyoruz. Çarpışmadan sonra sistemin momentumunun *m(v/2) + m(v/2) = mv* olmalıdır. Böylece sistemin momentumu korunur. Çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjilerde korunması gerekmektedir:

Sistemin başlangıçtaki enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

Sistemin çarpışmadan sonraki enejisi :

$$K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

Yukarıdaki ifadelerden görüleceği gibi kinetik enerji korunmamaktadır. Böyle bir olayın yani iki kütlenin birlikte hareketinin gerçekleşmesi zordur.

Örnek 9.6 Trafik kazası.

1800-kg lık bir araba trafik ışığında durmaktadır. Fakat 20.0 m/s süratle gelen 900-kg'lık bir araba kırmızı ışıkta duran bu arabaya arkasından çarpar. İki araba çarpışmadan sonra birlikte düz bir çizgi üzerinde hareket ederler. Arabaların çarpışmadan sonraki birleşik hareketlerinin hızını hesaplayınız.

Çözüm Sorudaki birleşik kelimesi önemlidir. Bu cisimlerin inelastik çarpışma yaptıklarını söylemektedir. Arabaların son süratlerinin 20.0 m/s olduğunu kabul edebiliriz. İzole sistemin çarpışmadan önceki momentumunun çarpışmadan sonraki momentuma eşit olduğunu yazabiliriz. Sistemin çarpışmadan önceki toplam momentumu küçük arabanın momentumuna eşittir. Büyük kütleli araba durgundur.

Trafik kazası.

Çarpışmadan önceki momentum

$$p_i = m_1 v_i = (900 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Çarpışmadan sonraki momentum

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2\,700 \text{ kg}) v_f$$

Çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlar son hızı bulmak için eşitlenirse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2\,700 \text{ kg}} = \boxed{6.67 \text{ m/s}}$$

İki-boyutta Çarpışmalar

Kesim 9.1 de izole edilmiş iki parçacıktan oluşan bir sistemin momentumu korunur. Bu parçacıkların birbirleri ile çarpışması sonucunda parçacıkların momentumlarının *x, y,* ve *z* bileşenleri korunur. Bilardo toplarının çarpışması düzlem üzerinde çarpışmadır. Bu çarpışma için momentum korunumu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

2 nolu cismi durgun ve 1 nolu cismin hareket ettiğini kabul edersek, $v_{2i} = 0$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$$

Kinetik enerjinin korunumundan,

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$

İki-boyutta Çarpışmalar

1 nolu cismin hızını ve cisimlerin kütleleri biliniyorsa,

Bilinmeyenler,

$(v_{1f},\ v_{2f},\ \theta,$ **ve** $\phi)$

3 denklem ve 4 bilinmeyen karşımıza çıkar. Böyle bir denklem sistemini çözmek için bilinmeyenlerin sayısının azalması gerekmektedir. Çarpışma inelastik ise enerji korunumundan yararlanamayız.

İki-boyutta çarpışmalar

• Koordinat sistemini seçiniz ve hızları bu sisteme göre belirleyiniz. Başlangıç hızlarını x ekseni üzerine yerleştirmek daha kolay işlem yapmanızı sağlayabilir.
• Koordinat sistemini resimlerken cisimleri etiketleyiniz ve hız vektörlerini çizip belirtiniz.
• Cisimlerin çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlarının *x* ve *y* bileşenlerini yazınız. Vektörlerin işaretlerine dikkat ediniz.
• Sistemin çarpışmadan önceki ve toplam momentumunun *x* eksenine ait bileşenlerini eşitleyiniz. Aynı işlemleri *y* ekseni bileşenleri içinde yapınız.
• Çarpışma inelastik ise kinetik enerji korunmaz. Bu yüzden fazladan bilgi içeren ifadelere gerek vardır. Çarpışma mükemmel bir inelastik çarpışma ise isimlerin çarpışmadan sonraki hızları aynıdır. Momentum eşitliğini bilinmeyenler için çözünüz.
• Çarpışma elastik ise sistemin çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjisi korunur. Bu ifadelerin eşitliği yazılarak denklem sistemi çözülecek hale gelir.

Kütle Merkezi

Geniş bir cismin kütle merkezi bulunacaksa cisim küçük kütlelerden veya parçalardan oluşmuş gibi kabul edilir (Δm_i). Bu parçaların koordinat başlangıcına olan uzaklığı (x_i, y_i , z_i) ile verilebilir.

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

y_{CM} ve z_{CM} **yukarıdakine benzer şekilde yazılabilir.**

Kütle parçaları çok küçük seçilirse,

Δm_i **yerine** dm **yazılırsa**

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x\, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z\, dm$$

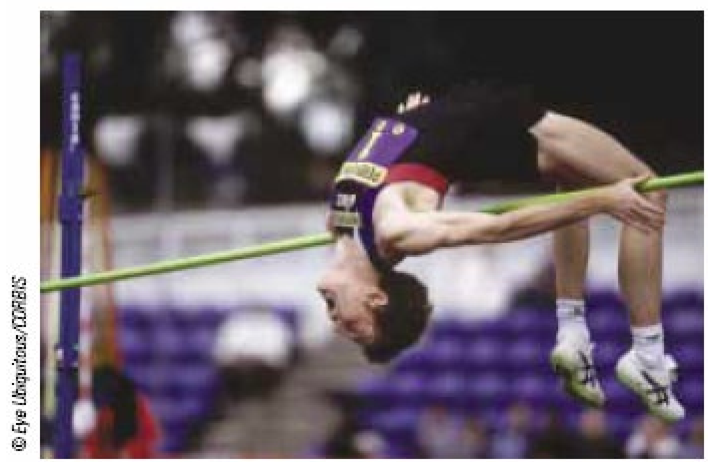
Kütle Merkezi

Simetrik bir cismin kütle merkezi simetri ekseninin üzerinde ve simetri düzleminin üzerindedir. Örneğin bir çubuğun kütle merkezi çubuğun tam ortasındadır. Küre veya bir kübün kütle merkezi geometrik merkezi üzerindedir.

Bitişik kütlelerden oluşan bir cismin her kütlesine yerçekimi kuvvetinin (mg) ayrı ayrı uygulandığını kabul edelim. Bu kütleler yerine cismin bir noktada toplanıp bu noktaya yerçekimi kuvvetinin uygulandığını kabul edersek bu noktaya ağırlık merkezi denir.

Yüksek atlama

1968 de Oregon Üniversitesinden Dick Fosbury yüksek atlama için "Fosbury flop" denilen yeni bir teknik kullandı. Bu teknikle dünya rekorunu 30 cm yukarıya çıkardı. Günümüzde birçok sporcu artık bu tekniği kullanmaktadır. Bu teknikte sporcu yüzü çıtaya dönük koşar ve çıtanın üzerine sırtıyla yükselirken belini iyice kırar. Bu belini kırma ile vücudunun ağırlık noktasını bedeninden dışarı taşır. Çıtanın üstünden sırt üstü geçerken vücudunun ağırlık noktası çıtanın altında kalır. Bu durum sporcunun ağırlık noktasını daha az enerjiyle yukarıya kaldırmasını sağlar. Bu L uzunluklu telin çembersel olarak bükülmesi sonucunda ağırlık noktasının değiştirilmesi gibidir. Ağırlık merkezi cismin neresine taşınmıştır.



(a)