

# Skaler Fark Denklemleri

Ankara Üniversitesi

## Tanım

$x$  bilinmeyen fonksiyon ve  $n \in \mathbb{N}$  bağımsız değişken olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0$$

eşitliğine bir **fark denklemi** denir.

$K$  cümlesi bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısından başlayan ve ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir cümlesi olmak üzere, bir  $K$  cümlesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki fark denklemleri örneklerini verebiliriz.

### Örnek

$$\Delta x(n) + 6x(n) = 0$$

### Örnek

$$x(n)\Delta^2 x(n) = 1$$

Bu denklemleri indis şeklinde de yazabiliriz:

### Örnek

$$x_{n+1} + 5x_n = 0$$

### Örnek

$$x_{n+2}x_n - 2x_{n+1}x_n + x_n^2 = 1$$

## Tanım

Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut olan en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin **basamağı** denir.

## Örnek

$5x(n+3) - 4x(n+2) + x(n) = 0$ , 3. basamaktan fark denklemi,

## Örnek

$4x(n+2) - x(n+1) = 5$ , 1. basamaktan fark denklemi.

## Tanım

$\mathbb{N}$  üzerinde tanımlı bir  $x(n)$  fonksiyonu  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0$$

denklemini sağlıyorsa, o zaman  $x(n)$  fonksiyonuna  $\mathbb{N}$  üzerinde bu denklemin bir **çözümü** denir.

$k$  yıncı basamaktan bir fark denkleminin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0$$

şeklinde  $k$  tane keyfi  $c_1, c_2, \dots, c_k$  sabitlerini içeren çözümüne **genel çözüm** denir. Bu çözümden elde edilen çözüme ise **özel çözüm** denir.

## Örnek

$x(n) = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  fonksiyonu

$$(n+2)x(n+2) - (n+1)x(n+1) = 1$$

fark denkleminin bir çözüdür.

## Tanım

$k$  yıncı basamaktan bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ilişkin

$$x(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1,$$

ya da

$$\Delta^i x(n_0) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1$$

şeklinde ilk  $k$  tane ardışık değerinin verilmesi gerekir ve bu koşullara **başlangıç koşulları** denir.  $k$  yıncı basamaktan bir fark denklemi ve başlangıç koşulundan oluşan probleme bir **IVP (başlangıç değer problemi)** adı verilir.



## Teorem

*k* yıncı basamaktan lineer olmayan skaler

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

*fark denklemi ve*

$$x(0) = \alpha_0, \quad x(1) = \alpha_1, \dots, \quad x(k-1) = \alpha_{k-1} \quad (2)$$

*başlangıç koşullarını ele alalım. Eğer  $f$  fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise, o zaman (1)-(2) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır.*