FİZ433 FİZİKTE BİLGİSAYAR UYGULAMALARI

(DERS NOTLARI)

Hazırlayan:

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Ankara, 2017

İÇİNDEKİLER

KONU 3

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ I

Bir çok bilim dalında lineer denklem sistemlerinin etkin ve doğru çözümlerinin bulunması en önemli ve temel problemlerden biridir. Bu bölümde lineer denklem sistemlerinin çözümleri için Gauss Eleme Yöntemi, Tekrarlamalı Yöntemler, Jacobi Yöntemi, Gauss-Seidel Yöntemi kullanılmıştır. Yöntemlerin Fizikte uygulamalarına örnekler, elektrik devrelerinin analizi, yapı mekaniği, vb. verilebilir. Bir lineer denklem sistemi aşağıdaki gibi genelleştirilerek ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

burada a_{ij} bilinen katsayılar, b_i bilinen sabitler ve x_i çözülmesi gereken bilinmeyenlerdir. Matris notasyonu kullanılarak bu denklem sistemi daha uygun ve kapalı biçimde yazılabilir (Ax=B).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

burada **A** bilinen a_{ij} katsayılarının oluşturduğu karesel katsayılar matrisine karşı gelir. Bilinmeyenlerin oluşturduğu n-sütun matrisi *x* ile, ve bilinen b_i sabitlerin oluşturduğu eşitliğin sağ tarafındaki n-sütunlu matris B ile gösterilmiştir.

Önce çözümlerini kolay bulabileceğimiz iki lineer denklem sistemi ile başlayalım:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

bu denklem sisteminin çözümlerini bulurken, birinci denklemden x_2 çekilir ve ikinci denklemde yerine konur, böylece bu yeni denklemden x_1 çözümü bilinen katsayılar ve sabitler cinsinden ifade edilir. Daha sonra bu çözüm baştaki birinci veya ikinci denklemde yerine yazılarak diğer çözüm elde edilir.

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$
$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Bu çözüm yönteminden başka, determinantlar kullanılarak da çözümleri elde etmek mümkündür. Bunun için determinantlar aşağıdaki gibi yazılır. Bu determinantların açılımı, yukarıda elde edilen çözümleri verecektir.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Verilen denklem sisteminin grafiksel çözümü ise bazı durumlarda kolaylıkla yapılabilir. Bunun için x_2, y eksenini ve x_1'de x eksenini gösterecek şekilde iki-boyutlu bir grafik çizilebilir. Her iki denklem de x_2 için çözülürse

$$x_2 = -\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$x_2 = -\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

elde edilir. Denklem sistemi lineer olduğu için herbir denklem bir doğru verecektir. Bu doğru denklemleri x_2=eğim*x_1+sabit şeklindedir. İki doğru aynı grafikte gösterildiğinde kesişim yerinin koordinatları bize x_1 ve x_2 çözümlerini verir.

Örnek: Aşağıdaki verilen denklem sisteminin çözümlerini bulalım.

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

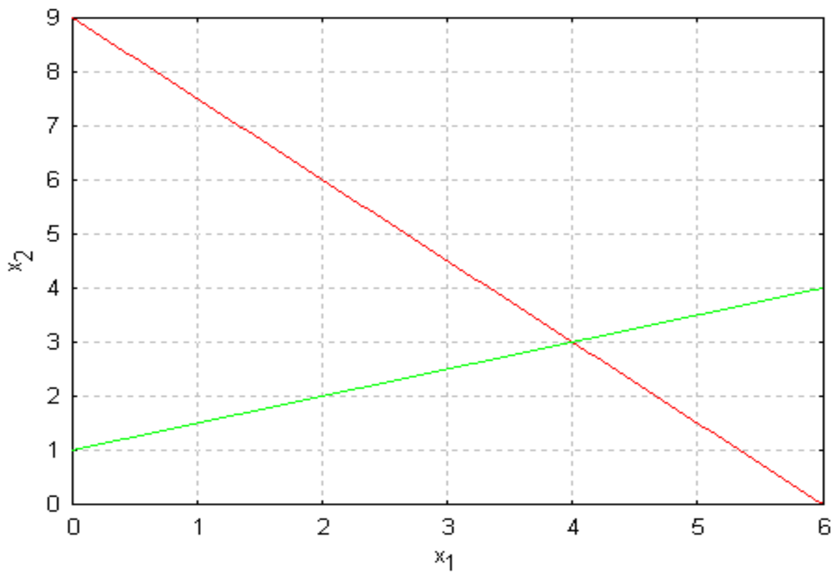
Burada çözümler,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{36-4}{6+2} = \frac{32}{8} = 4 \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{6+18}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$$

olarak bulunur. Bu örnekteki denklem sisteminin grafiksel çözümü için doğru denklemlerini

$$x_2 = -\left(\frac{3}{2}\right)x_1 + 9$$
$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)x_1 + 1$$

olarak yazalım ve buradan grafik çizilirse Şekil 2.1 elde edilir. Kesim yerine karşı gelen x_1 ve x_2 değerleri sırasıyla, 4 ve 3'tür.



Şekil 2.1 Lineer denklem sisteminin grafiksel çözümü

Verilen herhangi bir denklem sisteminin çözümlerini bulmak her zaman kolay olmayabilir, bazen çözümler tekil (singular) bazen de sonsuz sayıda çözüm olabilir. Eğer katsayılar determinantı sıfır ise sistem tekil denir. Lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri iki ana sınıfta incelenebilir. Bunlar doğrudan yöntemler ve dolaylı yöntemlerdir. Gauss eleme yöntemi doğrudan uygulanan bir yöntem, Gauss-Seidel yöntemi ise dolaylı yinelemeli (iterative) bir yötemdir.

Gauss Eleme Yöntemi

Gauss eleme yönteminde, lineer denklem sistemindeki (n denklem) değişkenler, her defasında bir değişken olmak üzere elenir, ve başta verilen denklem sistemi üçgen biçimli bir sisteme dönüştürülür. Birinci aşamada x_1 son n-1 denklemden elenir. İkinci aşamada x_2 son n-2 denklemden elenir. Bu işlem denklem sistemi üçgen biçimli oluncaya kadar devam eder, yani x_n son 1 denklemde bırakılır.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

yukarıdaki denklem sisteminde parentez içindeki rakamlar eski katsayıların her aşamada yenileri ile değiştirildiğini göstermek için kullanılmıştır. Bu sayılar aynı zamanda ileri yönde eleme sürecinde adım numarasıdır. Lineer denklem sistemi üçgen biçimine getirildikten sonra, çözümler geriye doğru yerine koyma ile bulunabilir. Bu süreçte ise ilk önce x_n son denklemden belirlenir ($x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$). Sonra bu değer geri kalan *n-1* denklemde yerine konur, ve x_{n-1} hesaplanır. Bu işlem her bilinmeyen bulununcaya kadar devam eder. Bu işlem de bir formulle gösterilebilir.

$$
x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad , \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1
$$

Örnek: Aşağıdaki denklem sistemini Gauss eleme yöntemi ile çözelim.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 17 \\
6x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 30
\end{aligned}
$$

Çözüm:

- *İleri yönde eleme:*

<u>İşlem 1:</u> Döndürme (pivot) elemanı a_{11}=1 dir. İkinci denklemden x_1 elemek için ilk denklem a_{21}/a_{11}=2 ile çarpılır ve ikinciden çıkarılır. Üçüncü denklemden x_1 elemek için birinci denklem a_{31}/a_{11}=6 ile çarpılır ve üçüncü denklemden çıkarılır. Bu durumda denklem sistemi aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\
0 - x_2 - x_3 &= -5 \\
0 - 9x_2 - 6x_3 &= -36
\end{aligned}
$$

<u>İşlem 2:</u> Burada döndürme elemanı a_{22} dir. Üçüncü denklemden x_2 elemek için ikinci denklem $a_{32}/a_{22}=9$ ile çarpılır ve üçüncü denklemden çıkarılır. Bu şekilde denklem sistemi üçgen biçimine dönüştürülür.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\
- x_2 - x_3 &= -5 \\
3x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

<u>İşlem 3:</u> Üçüncü denklem x_3 için çözülür, $x_3=3$.

- *Geri yerine koyma:*

İşlem 4: Üçüncü denklemden bulunan çözüm $x_3 = 3$, ikinci denklemde yerine konarak x_2 çözülür, $x_2 = 2$.

<u>İşlem 5:</u> Birinci denklemde x_2 ve x_3 değerleri yerleştirilir x_1 çözülür. Böylece üç çözüm de bulunmuş olur, $x_1 = 1$.

Genelleştirme: Eleme sürecinde k. adımda aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
m_i^{(k)} &= \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} && i = k+1, k+2, \dots, n \\
b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)} m_i^{(k)} && i = k+1, k+2, \dots, n \\
a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - b_{kj}^{(k-1)} m_i^{(k)} && i = k+1, k+2, \dots, n;\ j = k, k+1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- **Kısmi döndürme**

Gauss eleme yöntemi kısmi döndürme (partial pivoting) ile uygulanabilir. Bu yöntemi uygularken belli bir aşamada bölme işleminde kullandığımız katsayı $a_{kk}^{(k-1)}$ sıfır ise veya çok küçük ise bu yöntem kullanılamaz hale gelebilir. Bu problemden kurtulmak için döndürme elemanını içeren sütundaki en büyük eleman bulunur ve bu satırlar yerdeğiştirilir. Böylece mutlak değeri en büyük katsayıya böldüğümüz için yuvarlama hataları da azaltılabilir. Bu durumda çarpan $m_i^{(k)} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ olarak bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.

$$-6x_2 + 9x_3 = -3$$
$$7x_1 - 5x_3 = 3$$
$$5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = -4$$

Çözüm: Denklem sistemi sıfır döndürme elemanına sahip (a_{11}=0), bu nedenle kısmi döndürme uygularız.

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 7 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Birinci satır ile ikinci satır yerdeğiştirilir → $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & 9 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Sonra x_1 üçüncü denklemden elenir → $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & 9 \\ 0 & -8 & 9.57 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6.14 \end{pmatrix}$

- Burada ikinci denklem a_{32}/a_{22}=-8/-6=4/3 ile çarpılır ve 3. den çıkarılır.

Böylelikle x_2 üçüncü denklemden elenir → $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & -8 & 9.57 \\ 0 & 0 & 1.82 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6.14 \\ 1.61 \end{pmatrix}$

Üçüncü denklemden x_3=0.88 bulunur. Bu değer ikincide yerine konursa x_2=1.82 ve bunlar birinci denklemde yerine konursa x_1=1.06 elde edilir.

- **Gauss eleme yönteminde ileri yönde eleme, geri yerine koyma ve kısmi döndürme için FORTRAN alt programları**

a) Gauss yöntemi

```
subroutine gauss(a,b,n,x,tol,nhat)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n,n),b(n),x(n),s(n)
nhat=0
do i=1,n
s(i)=abs(a(i,1))
do j=2,n
if(abs(a(i,j)).gt.s(i)) then
s(i)=abs(a(i,j))
endif
enddo
enddo
call IYE(a,s,n,b,tol,nhat)
if(nhat.ne.-1) then
call GYK(a,n,b,x)
endif
return
```

```
      end
```

b) İleri yönde eleme

```
      subroutine IYE(a,s,n,b,tol,nhat)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      dimension a(n,n),b(n),s(n)
      do 30 k=1,n-1
      call KD(a,b,s,n,k)
      if(abs(a(k,k)/s(k)).lt.tol) then
      nhat=-1
      go to 30
      endif
      do i=k+1,n
      faktor=a(i,k)/a(k,k)
      do j=k+1,n
      a(i,j)=a(i,j)-faktor*a(k,j)
      enddo
      b(i)=b(i)-faktor*b(k)
      enddo
30    enddo
      if(abs(a(k,k)/s(k)).lt.tol) nhat=-1
      return
      end
```

c) Kısmi döndürme

```
      subroutine KD(a,b,s,n,k)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
dimension a(n,n),b(n),s(n)
    np=k
    buyuk=abs(a(k,k)/s(k))
    do ii=k+1,n
    yedek=abs(a(ii,k)/s(ii))
    if(yedek.gt.buyuk) then
    buyuk=yedek
    np=ii
    endif
    enddo
    if(np.ne.k) then
    do jj=k,n
    yedek=a(np,jj)
    a(np,jj)=a(k,jj)
    a(k,jj)=yedek
    enddo
    yedek=b(np)
    b(np)=b(k)
    b(k)=yedek
    yedek=s(np)
    s(np)=s(k)
    s(k)=yedek
    endif
    return
    end
```

d) Geri yerine koyma

```
subroutine GYK(a,n,b,x)

implicit real*8 (a-h,o-z)

dimension a(n,n),b(n),x(n)

x(n)=b(n)/a(n,n)

do i=n-1,1,-1

top=0.

do j=i+1,n

top=top+a(i,j)*x(j)

enddo

x(i)=(b(i)-top)/a(i,i)

enddo

return

end
```

Determinant Hesabı

Gauss Eleme yönteminin bir önemli özelliği de verilen matrisin determinantının hesaplanmasını kolaylaştırmasıdır. Üst üçgen haline getirilen matrisin determinantı diagonal elemanlarının çarpımı olacaktır ($D = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)}\cdots a_{nn}^{(n-1)}$). Burada determinantın işareti matrisi üçgen hale getirirken kaç kez satırları değiştirdiğimize bağlıdır. Bir A matrisinin elemanları (1,3,5,2,4,6,1,1,2) olarak veriliyor, burada ilk üç değer birinci sütundaki, ortadaki üç değer ikinci sütundaki ve son üç değer de üçüncü sütundaki elemanları gösterir. Verilen bu matrisin determinantını Gauss eleme yöntemi ile hesaplayan FORTRAN programı aşağıda verilmiştir.

- **FORTRAN programı**

```
implicit real*8 (a-h,o-z)

dimension a(3,3)

data a/1,3,5,2,4,6,1,1,2/
```

```
tol=1.d-6
call determ(a,3,d,tol)
print*,"determinant= ",d
end

subroutine determ(a,n,d,tol)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n,n)
d=1.
do k=1,n-1
kn=k
xm=abs(a(k,k))
do i=k+1,n
if(abs(a(i,k)).gt.xm) then
xm=abs(a(i,k))
kn=i
endif
enddo
if(k.ne.kn) then
d=d*(-1.)
do j=k,n
b=a(k,j)
a(k,j)=a(kn,j)
a(kn,j)=b
enddo
endif
if(xm.lt.tol) then
```

```
d=0.
return
endif
d=d*a(k,k)
do i=k+1,n
do j=k+1,n
a(i,j)=a(i,j)-a(i,k)*a(k,j)/a(k,k)
enddo
enddo
enddo
d=d*a(n,n)
return
end
```

Program çalıştırıldığında verilen matrisin determinantı -2 olarak bulunur.

Matrisin Tersinin Hesabı

Bu yöntemle verilen bir **A** matrisinin tersi $\mathbf{A^{-1}}$ matrisi hesaplanabilir. Bunun için $\mathbf{AA^{-1}=I}$ özelliği kullanılır. Burada **I** birim matristir. Satır veya sütunları birbirinden bağımsız bir matrisin (tekil-olmayan matris) tersinin bu yöntemle hesabını anlamak için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek: Aşağıda verilen 2x2 karesel matrisin tersini bulalım.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Çözüm: Bir C matrisinin bu A matrisinin tersi olduğunu düşünelim.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Tanım gereği $A^{-1}A=CA=I$, burada matris çarpımı

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Lineer denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$c_{11}+c_{12}=1$

$3c_{11}+4c_{12}=0$

$c_{21}+c_{22}=0$

$3c_{21}+4c_{22}=1$

Burada denklem sistemi çözülerek $c_{11}=4$, $c_{12}=-3$, $c_{21}=1$, $c_{22}=-1$ bulunur.

Verilen bir nxn **A** matrisi ve **I** birim matrisi olsun. İki matrise de aynı anda aynı satır dönüşümlerini uygulayalım, A matrisi birim matris haline geldiğinde, I matrisi de A^{-1} haline gelecektir. Bu süreç üç işlemden oluşmaktadır. Bunlar, normalleştirme, eleme ve satır değiştirme işlemleridir.

Örnek: Aşağıda verilen matrisin tersini hesaplayalım.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Çizelge 2.1 Matrisin tersini bulmak için Gauss yönteminin uygulanması

Verilen M matrisi ve I birim matrisi	$M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Sütun 1: Döndürme elemanı a_{11}=2		
Birinci satır a_{11}=2 ile bölünüp, normalize edilmiştir.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
a_{21}=0 olacak şekilde, birinci satır a_{21}=1 ile çarpılıp ikinciden çıkarılmıştır.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
a_{31}=0 olacak şekilde, birinci satır a_{31}=3 ile çarpılıp üçüncüden çıkarılmıştır.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & -1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Sütun 2: Döndürme elemanı a_{22}=0		
a_{22}=0 olduğundan ikinci satır ile üçüncü satır yerdeğiştirilmiştir.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
İkinci satır a_{22}=-1 ile bölünerek normalize edilmiştir.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
a_{12}=0 yapmak için ikinci satırı a_{12}=2 ile çarpıp birinciden çıkarılmıştır.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sütun 3: döndürme elemanı a_{33}=0.5		
Üçüncü satır a_{33}=0.5 ile bölünerek normalize edilmiştir.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
a_{13}=0 yapmak için üçüncü satırı a_{13}=-0.5 ile çarpıp birinciden çıkarılmıştır.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1.5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
a_{23}=0 yapmak için üçüncü satırı a_{23}=1.5 ile çarpıp ikinciden çıkarılmıştır.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
M matrisi birim matrise dönüşürken I matrisi de M^{-1} matrisine dönüşür. $M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$		

Matris Çarpımının Sayısal Hesaplanması

A (nxm) ve B (mx*l*) gibi iki matrisi çarpıp elde edilen C (nx*l*) matrisinin elemanlarını

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

bulan alt program aşağıdaki gibi yazılabilir:

- FORTRAN programı

```
Subroutine mcarp(a,b,c,m,n,l)
do i=1,n
do j=1,l
```

```
top=0.
do k=1,m
top=top+a(i,k)*b(k,j)
enddo
c(i,j)=top
enddo
enddo
return
end
```

Tekrarlamalı Yöntemler

Lineer denklem sistemleri tekrarlama yöntemleri ile çözülebilir. Doğrudan uygulanan yöntemlerden farklı olarak başlangıçta x_i tahminleri ile başlayıp gerekli duyarlılık elde edilinceye kadar süreç devam eder. Eğer katsayılar matrisi A diagonal olarak baskın ise, yani

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

bağıntısı sağlanıyorsa yakınsayan bir işlem vardır.

Jacobi Yöntemi

Jacobi yöntemi en basit tekrarlamalı yöntemlerden biridir. İşlemler başlangıçta $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$,..., $x_n^{(1)}$ değerlerini tahmin etmekle başlar. Bunlar, $x_1^{(1)}=b_1/a_{11}$, $x_2^{(1)}=b_2/a_{22}$,..., $x_n^{(1)}=b_n/a_{nn}$ ile verilir. Bundan sonra ikinci tahminler gelir

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11} \\
x_2^{(2)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22} \\
&\vdots \\
x_n^{(2)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

bu denklemler daha kapalı biçimde yazılabilir.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

Bu yöntemin yakınsaklık koşulu

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| > \left| x_i^{(k+1)} \cdot \varepsilon \right| \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ile verilir, burada ε istenen toleranstır.

Ödev: Aşağıdaki lineer denklem sistemini Jacobi yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Yol gösterme: Jacobi yöntemini uygulayabilmek için önce, katsayılar matrisinin diagonal baskın olduğunu kontrol ediniz. Çözüm için ilk tahminleri bulunuz. Sonra tekrarlama bağıntılarını kullanarak çözümleri elde ediniz. Bu yöntemde tekrarlama sayısı arttıkça çözümler doğru değerlere yaklaşmaktadır.