

FİZ433 FİZİKTE BİLGİSAYAR UYGULAMALARI
(DERS NOTLARI)

Hazırlayan:

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Ankara, 2017

İÇİNDEKİLER

1. LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI I/II

2. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ I/II

3. UYGUN EĞRİNİN BULUNMASI VE INTERPOLASYON I/II

4. SAYISAL İNTEGRAL HESAPLARI I/II

5. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ I/II

6. BENZETİM I/II

7. FİZİKTE SEMBOLİK HESAPLAMA I/II

EKLER

KAYNAKLAR

KONU 5

UYGUN EĞRİNİN BULUNMASI ve İNTERPOLASYON

I

Fiziksel sistemlerin davranışını anlatmak için matematiksel modeller geliştirilir. Belirli verilerin dağılımına bakarak veri kümesinde geçerli olacak fonksiyonun bulunması istenir. Burada uygun eğrinin bulunması (fit) ve interpolasyon teknikleri verilecektir. Basit bir fit fonksiyonu iki belirsiz katsayıdan (a_0 ve a_1) oluşmaktadır, buna örnek olarak $y=f(x)=a_0+a_1x$ fonksiyonunu verebiliriz. Bu bölümde kullanılacak yöntemler, lineer regresyon analizi, lineerleştirme yöntemi, polinom regresyon yöntemi, interpolasyon, lineer interpolasyon, ikinci mertebeden polinomlar yöntemi, yüksek mertebeden lagrange polinomları yöntemi ele alınmıştır. Konu ile ilgili uygulamalar ve örnek problemler verilmiştir.

Bir gözlem veya deneyden elde edilen veri noktaları deneysel hata içermektedir, bunlar bazen ihmal edilemeyecek kadar büyük de olabilir. Bu durumda her bir veri noktasından geçmesi gerekli olmayan fakat bu noktaların mümkün olduğu kadar yakınından geçen, verilerin genel dağılımına uyan bir eğrinin bulunması gerekmektedir. Bu yaklaşım en küçük kareler regresyonu olarak adlandırılır. Eğer veriler çok yüksek doğrulukla elde edilmiş ise bu durumda her bir veri noktasından geçen bir fonksiyon, genellikle bir polinom, ararız. Bu polinoma interpolasyon polinomu ve kesin bilinen veri noktaları arasında kalan noktalardaki değerleri elde etme işlemine de interpolasyon denir.

Lineer Regresyon

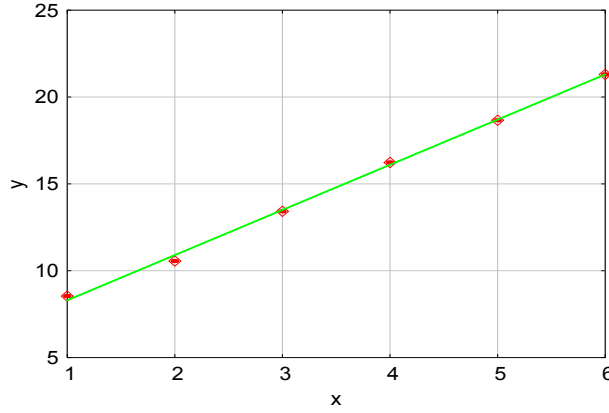
Fen ve Mühendislikte çoğunlukla değişkenler üzerine yapılan ölçümleri içeren deneyler gerçekleştirilir. Bu değişkenler x ve y olsun, bunlar arasında lineer bir bağıntı varsa, a_0 kesim noktası ve a_1 de doğrunun eğimi olmak üzere

$$y = a_0 + a_1x$$

yazılabilir. Bu sabitler, fit edilen doğrunun veri noktalarından mümkün olduğu kadar az hata ile geçecek şekilde seçilmiştir. Bir doğrunun bazı deney verilerinden geçişi Şekil 3.1' de gösterilmiştir. Burada x veri noktaları 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0 değerlerini almakta ve y değerleri de 8.54, 10.56, 13.42, 16.23, 18.66, 21.30 olmaktadır. Buna göre $x=1.5$

noktasındaki y değeri interpolasyon ile bulunabilir. Grafikten a_0 ve a_1 sabitleri bulunduktan sonra elde edilen $y=f(x)$ bağıntısında $x=1.5$ değeri için y 'nin aldığı değer $f(1.5)$ bulunabilir.

Regresyonda en çok kullanılan yöntemlerden biri küçük kareler yöntemidir. Bu yöntem her veri noktasındaki değerler ile fit edilen eğrinin değerleri arasındaki farkın toplamının minimum yapılması ilkesine dayanır.

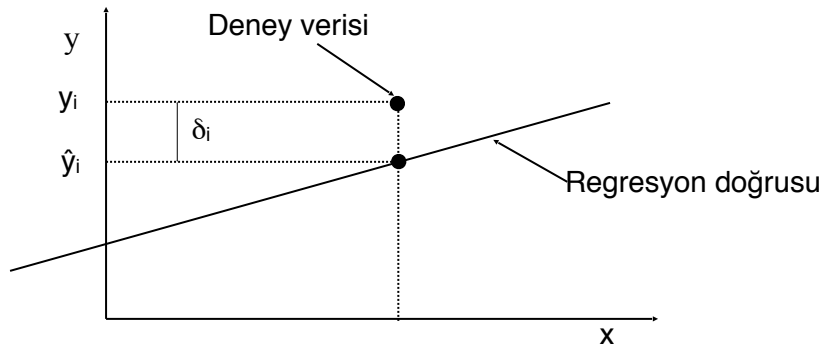


Şekil 3.1 Bir doğrunun deney verilerine fit edilmesi

Hesaplanan (veya tahmin edilen) değerler aşağıdaki denklem ile verilsin:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i$$

Bu teorik ifadede a_0 ve a_1 bilindiğinden bütün x değerlerine karşı gelen y değerleri hesaplanabilir. Deney verisi noktası (x_i, y_i) bu teorik doğruya i . noktada belirli bir δ_i uzaklıkta olacaktır. Her bir deney noktasında bu δ_i ler bulunup toplamları yapılabilir. Burada verilen tanımlar Şekil 3.2 üzerinde gösterilmektedir.



Şekil 3.2. Regresyon doğrusu ve (x_i, y_i) noktasındaki δ_i hatasının gösterimi

Sapmaların karelerinin toplamı

$$S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2$$

ile verilir. Burada a_0 ve a_1 sabitleri S 'yi minimum yapacak şekilde belirlenir. S 'yi minimum yapmak için a_0 ve a_1 e göre kısmi türevlerine bakmalıyız.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i = 0$$

Buradan elde edilen denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \quad a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Bu denklem sisteminin çözümünden katsayılar

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

olarak bulunur. Korelasyon katsayısı (r), deney verilerinin bir doğru ile ne kadar iyi temsil edildiğinin bir ölçüsüdür, ve değeri -1 ile 1 aralığında değişir. Bu r değeri -1 veya +1 'e yakın ise x ile y arasında güçlü bir lineer ilişki olduğunu gösterir. Ayrıca, x ile y arasında bir bağıntı yoksa veya lineer değilse, o zaman r sifira yakın olacaktır. Burada kullanışlı ifadeler

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

burada ortalama $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ olarak tanımlanır. Başka bir ifade ise s_e tahmininin standart hatasıdır:

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum \delta_i^2$$

Burada $n-2$ 'ye bölünmesinin nedeni, a_0 ve a_1 değerlerinin S hesabı için kullanılmasından dolayı hesapta iki serbestlik derecesi azalmış olmasıdır. Başka bir nedeni ise iki noktayı birleştiren bir doğru için veri yayılımından bahsedilememesidir. İyi bir fit için r^2 , 1'e yakın, s_e^2 ise 0'a yakın olmalıdır.

Örnek: Aşağıdaki Çizelge 3.1'de verilen x ve y değerlerine bir doğruyu fit ederek lineer regresyon analizi yapınız.

Çizelge 3.1 Ölçüm sonuçlarını gösteren veriler

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
y_i	8.54	10.56	13.42	16.23	18.66	21.30

Çözüm: Verilenler için $n=6$ kullanarak,

$$\sum x_i = 21.0, \quad \sum y_i = 88.71, \quad \text{ve} \quad \sum x_i^2 = 91.0, \quad \sum x_i y_i = 355.94$$

bulunur. Fit fonksiyonundaki katsayılar a_1 ve a_0 aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_1 = \frac{6(355.94) - 21(88.71)}{6(91.0) - (21)^2} = 2.59743, \quad a_0 = \frac{88.71 - 2.9743(21.0)}{6} = 5.694$$

Böylece yukarıda verilere fit edilecek doğrunun denklemi

$$y = 2.59743x + 5.694$$

olarak verilir. Burada r^2 ve s_e^2 yi hesaplayalım. Windows Office paketinin Excel programı veya Linux OpenOffice veya Koffice paketlerinin Spreadsheet programı kullanılarak aşağıdaki Çizelge 3.2 oluşturulabilir. Çizelge 3.2'den tahminin standart hatasının $s_e < S$ (toplam standart sapma) olduğu görülür, bu ise lineer regresyon modelinin önemli (uygulanabilir) olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3.2 Lineer regresyon analizi ve korelasyon katsayısının hesaplanması

i	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000
x_i	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000
y_i	8,5400	10,5600	13,4200	16,2300	18,6600	21,3000
x_i²	1,0000	4,0000	9,0000	16,0000	25,0000	36,0000
y_i²	72,9316	111,5136	180,0964	263,4129	348,1956	453,6900
\hat{y}_i	8,2914	10,8889	13,4863	16,0837	18,6812	21,2786
$(\hat{y}_i - y_i)^2$	0,0618	0,1081	0,0044	0,0214	0,0004	0,0005
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$	Σy_i^2	$\Sigma (\hat{y}_i - y_i)^2$	$\Sigma (y_i - \bar{y})^2$
21,0000	88,7100	91,0000	355,9400	1429,8401	0,1966	118,2628
a₁	a₀		r		s_e	
2,5974	5,6940		0,9992		0,2217	

Örnek Program: Basit regresyon ve korelasyon katsayılarını hesaplayan FORTRAN programı aşağıda verilmiştir.

- **FORTRAN programı**
Dimension x(6),y(6)
Open(1,file='veri.txt')
Data tx,ty,txk,tyk,txy/5*0./,n/6/
do 10 i=1,6
read(1,*)x(i),y(i)
write(*,*)x(i),y(i)
10 continue
do 15 i=1,6
tx=tx+x(i)
ty=ty+y(i)
txk=txk+x(i)**2
tyk=tyk+y(i)**2
15 txy=txy+x(i)*y(i)
orx=tx/n

```

ory=ty/n
xork=orx**2
york=ory**2
tsxk=txk-n*xork
tsyk=tyk-n*york
tsxy=txy-n*orx*ory
b1=tsxy/tsxk
b0=ory-b1*orx
corr=tsxy/((tsxk**0.5)*(tsyk**0.5))
30  format('/',3x,'Regresyon denklemi:
+   y=',f7.4,'+',f7.4,'x',
+   '/',3x,'Korelasyon katsayısı=',f7.4)

write(*,30)b0,b1,corr

stop

end

```

Program çalıştırıldığı zaman verilere bağlı olarak çıktı aşağıdaki gibi olacaktır.

1. 8.53999996
2. 10.5600004
3. 13.4200001
4. 16.2299995
5. 18.6599998
6. 21.2999992

Regresyon denklemi $y = 5.6940 + 2.5974x$ ve korelasyon katsayısı = 0.9992 bulunur.

Lineerleştirme

Bazı problemlerde veriler lineer bir dağılım göstermeyebilir. Bu durumda verilerin lineer olmayan bir fonksiyona fit edilmesi gerekir. Çoğu durumda bu fonksiyon logaritmik yöntem kullanılarak lineerleştirilebilir. Bundan sonra regresyon analizi yapılabilir. Örneğin, (x_i, y_i) verileri lineer olmayan bir modelle tanımlanabilir:

$$y = c_0 x^{c_1}$$

Her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = \ln c_0 + c_1 \ln x$$

biçimine dönüştürülür. Burada $y' = \ln y$, $a_0' = \ln c_0$, $a_1' = c_1$ ve $x' = \ln x$ yazılarak lineerleştirme tamamlanmış olur, $y' = a_0' + a_1' x'$. Böylece lineer regresyonda veri noktaları (x_i, y_i) yerine $(\ln x_i, \ln y_i)$ alınmış olacaktır. Daha sonra lineer olmayan denklemdeki bilinmeyenler $c_0 = e^{a_0'}$ ve c_1 bulunarak yerine yazılır ve $y = e^{a_0'} x^{c_1}$ fonksiyonu bulunur.

Polinomlarla Regresyon

En küçük kareler yöntemini genişleterek, verilen veri kümesini ikinci, üçüncü, ve daha yüksek mertebeden polinomlarla fit edecek şekilde bir yöntem geliştirebiliriz. Bu yöntem özellikle lineer olmayan veya fonksiyonlar durumunda kullanışlıdır. Burada regresyon katsayıları tahmin edilen değerler ile deneysel değerlerin arasındaki sapmaların karelerinin toplamını minimum yapacak şekilde seçilir. Örnek olarak, ikinci mertebeden bir polinoma fit yaptığımızı düşünürsek, o zaman minimum yapılacak fonksiyon

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x_i^2)^2$$

ile verilir. $S(a_0, a_1, a_2)$ fonksiyonunun a_0, a_1 ve a_2' ye göre kısmi türevleri alınarak bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemi aşağıdaki matris biçiminde yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

Regresyon polinomundaki katsayılar bu denklem sistemi çözülerek bulunur. Çözüm yöntemi olarak çeşitli yöntemler, örneğin daha önceki bölümlerde verilen Gauss eleme yöntemi, kullanılabilir.

Örnek problem: Aşağıdaki Çizelge 3.3'de verilen verileri kullanarak en iyi fit parabolünü bulunuz.

Çizelge 3.3 Polinomlarla fit edilebilecek deney verileri

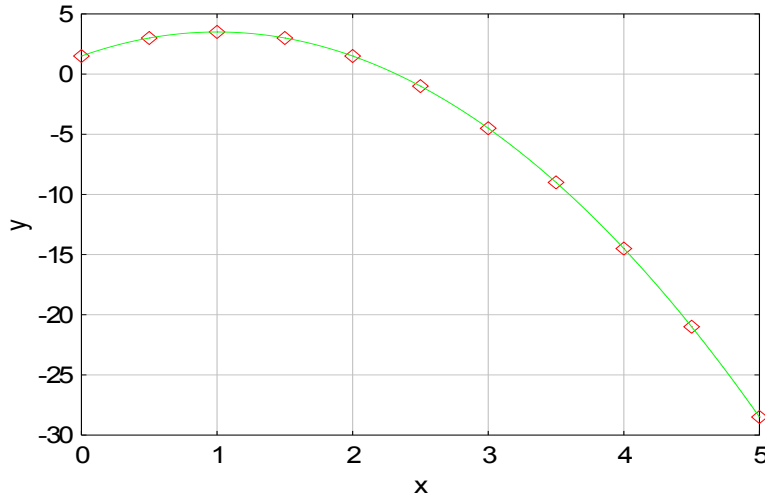
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y_i	1.5	3.0	3.5	3.0	1.5	-1.0	-4.5	-9.0	-14.5	-21.0	-28.5

Çözüm: Çizelgedeki değerler kullanılarak polinomun katsayıları için denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} 11.0 & 27.5 & 96.25 \\ 27.5 & 96.25 & 378.13 \\ 96.25 & 378.13 & 1583.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66.0 \\ -330.0 \\ -1509.75 \end{pmatrix}$$

Bu matris sistemi katsayılar için çözülerek $a_0=1.5$, $a_1=4.0$ ve $a_2=-2.0$ bulunur. Şekil 3.3'de çizelgedeki veriler ve fit fonksiyonunun grafiği birlikte gösterilmiştir.

Yüksek mertebeden polinomlara fit yapma işlemi de burada verilen yöntemle yapılabilir. Genellikle 4-boyuttan fazla polinom regresyonu tercih edilmez. Çünkü, çok yüksek boyutlu polinomlara fit yapmak hem yuvarlama hatalarının artmasına hem de veriler arasında sahte eğrilere ve eğri boyunca titreşimlere yol açabilir.

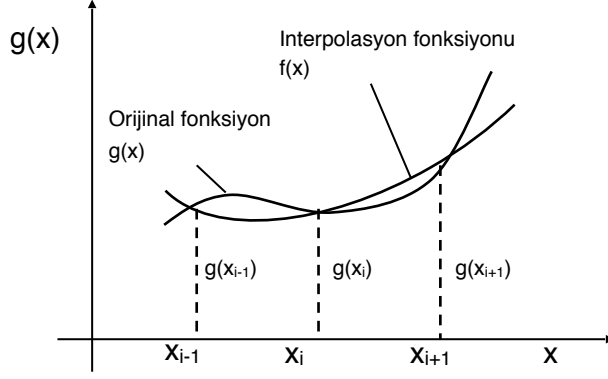


Şekil 3.3 Veri noktaları ve fit fonksiyonunun ($y=1.5+4x-2x^2$) grafiği.

İnterpolasyon

Deneyler genellikle değişkenlere ve bazı parametrelere bağlı olarak ancak sınırlı sayılarda yapılabilmektedir. Değişkenlerin veya parametrelerin her bir değeri için deney yapmak büyük masraflar gerektirdiğinden ve bazen de imkansız olduğundan, ancak elde edilen sınırlı sayıdaki veriler kullanılarak bir olay hakkında analiz yapılmaya çalışılır. Deney verileri deneysel hataları da içermektedir. Bu durumda deney noktalarından geçmesi zorunlu olmayan fakat hatalardan geçen bir eğrinin bulunması

istenir. Veri noktaları kesin olarak bilindiğinde eğrinin bu noktalardan geçmesini istemeliyiz. Bu şekilde bulunan polinom fonksiyonuna interpolasyon fonksiyonu denir. Doğruluğu bilinen noktalar arasındaki ara değerleri elde etme işlemine de *interpolasyon* denir. Interpolasyonun en önemli kullanım yeri çizelgede verilmiş verilerden ara değerlerin elde edilmesidir. Diğer kullanımı ise bilinen bir $f(x)$ fonksiyonunun, hesaplanması daha kolay bir $g(x)$ fonksiyonu ile yaklaşık olarak temsil edilmesidir, Şekil 3.4.



Şekil 3.4 Bilinen $g(x)$ fonksiyonu yerine $f(x)$ fonksiyonunun kullanılması

Interpolasyon polinomu birinci mertebeden ise bilinen lineer interpolasyon ile karşılaşırız. Veri noktalarını düz çizgilerle birleştirebiliriz. Bu durumda interpolasyon fonksiyonu

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

alınır. Buradaki a_0 ve a_1 katsayıları $f(x_i)$ fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarından geçmesi gerektiği düşünülerek hesaplanabilir.

$$a_0 = \frac{x_{i+1}f(x_i) - x_i f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_1 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Bu katsayılar yerine konulduğunda interpolasyon fonksiyonu

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

ile verilir. Bu ifade biraz farklı düzenlenirse Lagrange birinci mertebe interpolasyon fonksiyonu elde edilir.

$$f(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

Lineer interpolasyon ancak veriler birbirine yakın ise iyi sonuç verir. Veriler birbirinden uzak ise bu durumda daha yüksek mertebeden polinomlarla interpolasyon işlemiyle ilgilenilir.

Örnek Program: Polinom interpolasyonu ile $\sin(x)$ fonksiyonunun 0 ile π arasında kesikli değerlerinin hesaplanması ve $\exp(x)$ fonksiyonunun 0 ile 1 aralığında değerlerinin hesaplanması ile ilgili FORTRAN program aşağıda verilmiştir.

- **FORTRAN programı**

```

program intpol

integer np

real pi

parameter(np=10,pi=3.1415926)

integer i,n,nfunc

real dy,f,x,y,xa(np),ya(np)

write(*,*) 'Interpolasyon tablosu '

write(*,*) ' ... sin(x)  0<x<pi'

write(*,*) ' ... exp(x)  0<x<1 '

write(*,*) 'Bu tabloda kac girdi olacak? (not: n<10)'

read(*,*) n

do 14 nfunc=1,2

  if (nfunc.eq.1) then

    write(*,*) 'Sinus fonksiyonu: 0-pi'

    do 11 i=1,n

      xa(i)=i*pi/n

      ya(i)=sin(xa(i))

11  continue

  else if (nfunc.eq.2) then

    write(*,*) 'Ustel fonksiyon: 0-1'

```

```

do 12 i=1,n
  xa(i)=i*1.0/n
  ya(i)=exp(xa(i))
12  continue

else
  stop
endif

write(*,'(t10,a1,t20,a4,t28,a13,t46,a5)')
*   'x','f(x)','interpolasyon','hata'

do 13 i=1,10
  if (nfunc.eq.1) then
    x=(-0.05+i/10.0)*pi
    f=sin(x)
  else if (nfunc.eq.2) then
    x=(-0.05+i/10.0)
    f=exp(x)
  endif

  call orintpol(xa,ya,n,x,y,dy)
  write(*,'(1x,3f12.6,e15.4)') x,f,y,dy
13  continue

write(*,*) '*****'
write(*,*) 'RETURN tusuna basin'
read(*,*)
14  continue

end

subroutine orintpol(xa,ya,n,x,y,dy)

```

```

integer n,nmax
real dy,x,y,xa(n),ya(n)
parameter (nmax=10)
integer i,m,ns
real den,dif,dift,ho,hp,w,c(nmax),d(nmax)
ns=1
dif=abs(x-xa(1))
do 11 i=1,n
  dift=abs(x-xa(i))
  if (dift.lt.dif) then
    ns=i
    dif=dift
  endif
  c(i)=ya(i)
  d(i)=ya(i)
11 continue
y=ya(ns)
ns=ns-1
do 13 m=1,n-1
  do 12 i=1,n-m
    ho=xa(i)-x
    hp=xa(i+m)-x
    w=c(i+1)-d(i)
    den=ho-hp
    if(den.eq.0.)pause 'intpol. da hata !'
    den=w/den
    d(i)=hp*den
  
```

```

        c(i)=ho*den
12  continue
    if (2*ns.lt.n-m)then
        dy=c(ns+1)
    else
        dy=d(ns)
        ns=ns-1
    endif
    y=y+dy
13  continue

    return
end

```

Program çalıştırıldığında veri tablosunda kaç girdi olduğu sorulmakta ve veri noktası sayısı $n=3$ girildiğinde aşağıdaki çıktı elde edilmektedir.

Sinus fonksiyonu 0-pi

x	f(x)	interpolasyon	hata
0.157080	0.156434	0.185113	-0.6809E+00
0.471239	0.453990	0.496882	-0.3691E+00
0.785398	0.707107	0.730709	-0.1353E+00
1.099557	0.891007	0.886594	0.2057E-01
1.413717	0.987688	0.964536	0.9851E-01
1.727876	0.987688	0.964536	0.9851E-01
2.042035	0.891007	0.886594	0.2057E-01
2.356194	0.707107	0.730709	-0.1353E+00
2.670354	0.453991	0.496882	0.1072E+00
2.984513	0.156435	0.185113	0.5521E-01

Ustel fonksiyon 0-1

x	f(x)	interpolasyon	hata
0.050000	1.051271	1.098047	0.1717E+00
0.150000	1.161834	1.185050	0.9310E-01
0.250000	1.284025	1.291711	0.3413E-01
0.350000	1.419068	1.418031	-0.5188E-02
0.450000	1.568312	1.564009	-0.2485E-01
0.550000	1.733253	1.729646	-0.2485E-01
0.650000	1.915541	1.914940	-0.5188E-02
0.750000	2.117000	2.119894	0.3413E-01
0.850000	2.339647	2.344505	-0.2703E-01
0.950000	2.585710	2.588775	-0.1392E-01

Buradaki değerleri kullanarak sinüs fonksiyonu için grafik çizilirse $n=3$ alındığında interpolasyonun iyi olmadığı görülür, Şekil 3.5. Eğer $n=9$ alınırsa verileri çok iyi tanımlayan bir eğri elde edilir, Şekil 3.6.

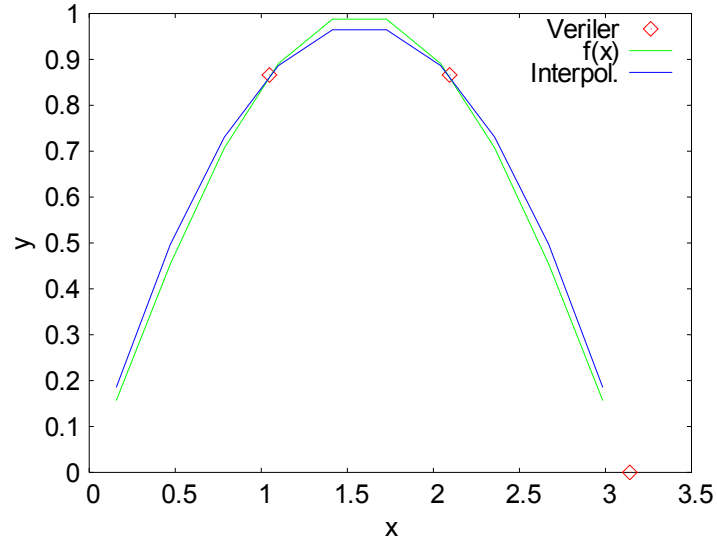
Sinus fonksiyonu 0-pi

x	f(x)	interpolasyon	hata
0.157080	0.156434	0.156436	0.5028E-04
0.471239	0.453990	0.453990	-0.3315E-05
0.785398	0.707107	0.707107	0.6029E-06
1.099557	0.891007	0.891006	-0.1623E-06
1.413717	0.987688	0.987688	0.3706E-07
1.727876	0.987688	0.987688	0.3704E-07
2.042035	0.891007	0.891007	-0.1625E-06
2.356194	0.707107	0.707107	0.6047E-06

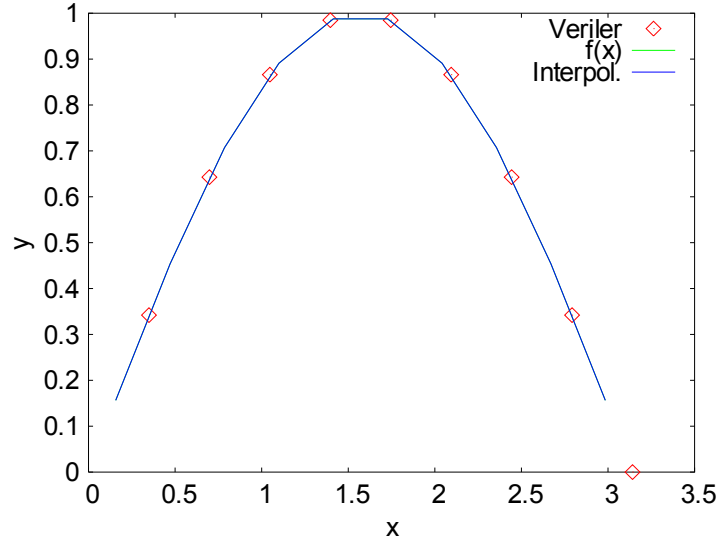
2.670354	0.453991	0.453991	-0.3320E-05
2.984513	0.156435	0.156434	-0.2999E-05

Ustel fonksiyon 0-1

x	f(x)	interpolasyon	hata
0.050000	1.051271	1.051273	0.7595E-06
0.150000	1.161834	1.161834	0.4368E-07
0.250000	1.284025	1.284026	0.8988E-08
0.350000	1.419068	1.419067	-0.3323E-08
0.450000	1.568312	1.568312	0.5615E-09
0.550000	1.733253	1.733253	0.5791E-09
0.650000	1.915541	1.915541	-0.2417E-08
0.750000	2.117000	2.117000	0.1004E-07
0.850000	2.339647	2.339647	-0.3210E-07
0.950000	2.585710	2.585710	-0.1088E-06



Şekil 3.5 Sinus fonksiyonu verileri ve interpolasyon eğrisi, $n=3$ alınmıştır.



Şekil 3.6 Sinus fonksiyonu verileri ve interpolasyon eğrisi, $n=9$ alınmıştır.