NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER

- Nümerik Analiz-*Bilimsel Hesaplama Matematiği, W.Cheney, D. Kincaid Türkçesi : N. Özalp-E.Demirci, 2012 Gazi Yayınları*

- Nümerik Analiz-*Bilimsel Hesaplama Matematiği, W.Cheney, D. Kincaid Türkçesi : N. Özalp-E.Demirci, 2012 Gazi Yayınları*
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Analysis, AMS-The Sally Series, 2009.

- Nümerik Analiz-*Bilimsel Hesaplama Matematiği, W.Cheney, D. Kincaid Türkçesi : N. Özalp-E.Demirci, 2012 Gazi Yayınları*
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Analysis, AMS-The Sally Series, 2009.
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Mathematics and Computing,Brooks,1985.

- Nümerik Analiz-*Bilimsel Hesaplama Matematiği, W.Cheney, D. Kincaid Türkçesi : N. Özalp-E.Demirci, 2012 Gazi Yayınları*
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Analysis, AMS-The Sally Series, 2009.
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Mathematics and Computing,Brooks,1985.
- Yakowitz,S., An Introduction to Numerical Computations, Macmillan, 1989.

- Nümerik Analiz-*Bilimsel Hesaplama Matematiği, W.Cheney, D. Kincaid Türkçesi : N. Özalp-E.Demirci, 2012 Gazi Yayınları*
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Analysis, AMS-The Sally Series, 2009.
- Cheney,W.,-Kincaid,D., Numerical Mathematics and Computing,Brooks,1985.
- Yakowitz,S., An Introduction to Numerical Computations, Macmillan, 1989.

- Başarı Değerlendirmesi:

$$\text{Dönem Sonu Notu} = (0.4 \times \text{Ara sınav}) + (0.6 \times \text{Dönem Sonu Sınavı})$$

- Nümerik analiz değişik matematiksel problemlere sayısal çözümler elde etmek için algoritmaların çalışmasını, geliştirilmesini ve analizini içerir. Nümerik analiz sıklıkla **bilimsel hesaplama matematiği** olarak adlandırılır.

- Nümerik analiz değişik matematiksel problemlere sayısal çözümler elde etmek için algoritmaların çalışmasını, geliştirilmesini ve analizini içerir. Nümerik analiz sıklıkla **bilimsel hesaplama matematiği** olarak adlandırılır.
- Çalıştığımız algoritmalar tartışmasız şekilde yüksek-hızlı bilgisayarlarda kullanılmak için hedeflenir ve bu nedenle bir problemin çözümü elde edilmeden önce bir başka önemli adım devreye girer: algoritmayı bilgisayarla iletişime geçiren bir bilgisayar *kodu* veya *programı* yazılmak zorundadır.

- Nümerik analiz değişik matematiksel problemlere sayısal çözümler elde etmek için algoritmaların çalışmasını, geliştirilmesini ve analizini içerir. Nümerik analiz sıklıkla **bilimsel hesaplama matematiği** olarak adlandırılır.
- Çalıştığımız algoritmalar tartışmasız şekilde yüksek-hızlı bilgisayarlarda kullanılmak için hedeflenir ve bu nedenle bir problemin çözümü elde edilmeden önce bir başka önemli adım devreye girer: algoritmayı bilgisayarla iletişime geçiren bir bilgisayar *kodu* veya *programı* yazılmak zorundadır.
- Matematiksel problemleri bilgisayarda sayısal olarak çözmek **bilimsel hesaplamadır**. İlgili algoritmaların (yordamların) geliştirilmesi ve davranışlarının çalışılması ise **bilimsel hesaplama matematiğidir**.

Eğer f reel değişkenli reel bir fonksiyon ise bu durumda f fonksiyonunun c noktasındaki **limiti** (eğer mevcut ise) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

denkleminin anlamı; her ε pozitif sayısı için x ve c arasındaki uzaklığın δ dan küçük kaldığı her durumda, $f(x)$ ve L arasındaki uzaklık ε dan küçük kalacak şekilde, ε a karşılık gelen bir δ sayısı vardır, yani

$$\text{her } 0 < |x - c| < \delta \text{ için } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Eğer bu özelliği sağlayan bir L sayısı yok ise, f nin c noktasında limiti yoktur.

Eğer

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = f(c)$$

ise, f fonksiyonu c de **süreklidir** denir.

Teorem (Sürekli Fonksiyonlar için Ortalama-Değer Teoremi)

Bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyon $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki bütün değerleri alır.

f nin c deki **türevi** (eğer mevcut ise)

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu limit herhangi bir fonksiyon ve herhangi bir c için varolmak zorunda olmadığından, böyle bir fonksiyon için türev varolmayabilir. Eğer f, $f'(c)$ varolacak şekilde bir fonksiyon ise, bu durumda f ye c de **türevlenebilirdir** denir. Eğer f fonksiyonu c de türevlenebilir ise, bu durumda c de sürekli olmak zorundadır. Şimdi bunun neden böyle olmak zorunda olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \\ &= f'(c) \lim_{x \to c}(x - c) = f'(c).0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, eğer $f(x)$ c de türevlenebilir ise, bu durumda $f'(x)$ vardır ve $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dir.

Teorem (Lagrange Kalanlı Taylor Teoremi)

Eğer $f \in C^n[a,b]$ *ve* (a,b) *açık aralığında* $f^{(n+1)}$ *mevcut ise, bu durumda* $[a,b]$ *kapalı aralığındaki herhangi* c *ve* x *noktaları için*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x) \tag{1}$$

dir. Burada hata terimi, c *ve* x *arasındaki bazı* ξ *ler için,*

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

dir. $c = 0$ *durumu* **Maclaurin serisidir:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + E_n(x) \tag{2}$$

Bazı önemli fonksiyonların Taylor serisi:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad (-1 < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

Örnek

$a = 1$, $b = 2$, ve $c = 1$ için Taylor Teoremini kullanarak

$$f(x) = \ln x$$

fonksiyonunun Taylor serisini belirleyiniz.

Çözüm

$f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$ *v.s.*
$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$ *ve* $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ $(k \geq 1)$
Formülde yazılırsa

$$E_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \xi^{-(n+1)} (x-1)^{n+1} \qquad (1 < \xi < x)$$

ile

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (x-1)^k + E_n(x) \qquad (1 \leq x \leq 2)$$

Örnek

$\ln 2$ yi 10^{-8} duyarlılıkla hesaplamak için seride kaç terim kullanılmalıdır?

Örnek

$\ln 2$ yi 10^{-8} duyarlılıkla hesaplamak için seride kaç terim kullanılmalıdır?

Çözüm

Seride $x = 2$ alırsak, $|E_n(2)| < 1/(n+1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + E_n(2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + E_n(2)\end{aligned}$$

dir. $E_n(2)$ terimi sayısal hatadır. O halde $\ln 2$ *yi arzu edilen duyarlılıkta hesaplamak için n yi $E_n(2) \leq 10^{-8}$ olacak şekilde seçmeliyiz.*
$1/(n+1) \leq 10^{-8} \Rightarrow n+1 \geq 10^{8}$ *dir. O halde* $\ln 2$ *yi istenilen duyarlılıkta hesaplamak için en az* 100 **milyon** *terime gereksinim vardır! Buradan,* $\ln 2$ *yi hesaplamak pratik değil. Aslında, aynı hesap* $\ln 1.5$ *için yapıldığında, aynı duyarlılık için sadece* **22** *terime gerek duyulduğu gösterilebilir!*

Taylor Teoreminin $n = 0$ özel durumu matematiksel çalışmalarda sıklıkla kullanılır ve **Ortalama-Değer Teoremi** olarak bilinir.

Teorem (Ortalama-Değer Teoremi)

Eğer f, $C[a, b]$ de ise ve eğer (a, b) açık aralığında f' mevcut ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığındaki x ve c için

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c)$$

dir. Burada ξ, c ile x arasındadır.

Ortalama-Değer Teoreminin özel bir durumu **Rolle Teoremidir**.

Teorem (Rolle Teoremi)

Eğer f, $[a, b]$ de sürekli ve eğer (a, b) de f' mevcut ve $f(a) = f(b)$ ise, bu durumda (a, b) açık aralığındaki bazı ξ ler için $f'(\xi) = 0$ dır.

Teorem (İntegral Kalanlı Taylor Teoremi)

Eğer $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığındaki herhangi x ve c noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + R_n(x) \tag{3}$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

dir.

Taylor Teoreminin Alternatif Formu

Lagrange kalanlı Taylor Teoreminde x yerine $x+h$ ve c yerine x alırsak, serinin, ve Taylor Teoreminin kalan teriminin bir başka formunu elde edebiliriz.

Teorem (Taylor Teoreminin Alternatif Formu)

Eğer $f \in C^{n+1}[a,b]$ ise, bu durumda $[a,b]$ kapalı aralığındaki herhangi x ve $x+h$ noktaları için

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + E_n(h) \tag{4}$$

dir. Burada

$$E_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

olup, ξ noktası x ve $x+h$ arasındadır.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + E_n(h)$$

Örnek

A^{x+h} için Taylor formülünü belirleyiniz ve $10^{1.0001}$ e yaklaşınız.

Örnek

A^{x+h} için Taylor formülünü belirleyiniz ve $10^{1.0001}$ e yaklaşınız.

Çözüm

$f(x) = A^x$ *alırsak,* $f^{(n)} = A^x(\ln A)^n$ *buluruz. Denklem (4) ü kullanırsak,*

$$A^{x+h} = A^x \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} (\ln A)^k \right) + E_n(h)$$

$A = 10,\ x = 1$ *ve* $h = 10^{-4}$ *yazarsak*

$$\begin{aligned} 10^{1.0001} &= 10(1 + 10^{-4}(\ln 10) + \frac{1}{2} 10^{-8} (\ln 10)^2 + \cdots) \\ &\approx 10(1 + 2.30259 \times 10^{-4} + 2.65095 \times 10^{-8}) \\ &\approx 10.00230\ 00265\ 095 \end{aligned}$$

Teorem (İki Değişkenli Taylor Teoremi)

$f \in C^{n+1}([a,b] \times [c,d])$ olsun. Eğer (x,y) ve $(x+h, y+k)$, $[a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ dikdörtgeninde noktalar ise, bu durumda

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{i} f(x,y) + E_n(h,k) \tag{5}$$

dır. Burada

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k)$$

olup, θ noktası 0 ve 1 arasındadır.