NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER

Yakınsaklık Basamağı

Bir dizinin yakınsaklık hızını tanımlamak için bazı özel terminolojiler kullanılmaktadır. $[x_n]$ in, bir x^* limitine yakınsayan, reel sayıların bir dizisi olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \leq C \left|x_n - x^*\right|^{\alpha} \qquad (n \geq N)$$

olacak şekilde pozitif C ve α sabitleri ve bir N tamsayısı var ise, bu durumda yakınsaklık oranı en azından $\alpha-$**yıncı basamaktandır** deriz.

- $\alpha = 1$ ve $C < 1$ için lineer

Yakınsaklık Basamağı

Bir dizinin yakınsaklık hızını tanımlamak için bazı özel terminolojiler kullanılmaktadır. $[x_n]$ in, bir x^* limitine yakınsayan, reel sayıların bir dizisi olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \leq C \left|x_n - x^*\right|^{\alpha} \qquad (n \geq N)$$

olacak şekilde pozitif C ve α sabitleri ve bir N tamsayısı var ise, bu durumda yakınsaklık oranı en azından $\alpha-$**yıncı basamaktandır** deriz.

- $\alpha = 1$ ve $C < 1$ için lineer
- $\alpha = 2$ için kuadratik

Yakınsaklık Basamağı

Bir dizinin yakınsaklık hızını tanımlamak için bazı özel terminolojiler kullanılmaktadır. $[x_n]$ in, bir x^* limitine yakınsayan, reel sayıların bir dizisi olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^{\alpha} \qquad (n \geq N)$$

olacak şekilde pozitif C ve α sabitleri ve bir N tamsayısı var ise, bu durumda yakınsaklık oranı en azından $\alpha-$**yıncı basamaktandır** deriz.

- $\alpha = 1$ ve $C < 1$ için lineer
- $\alpha = 2$ için kuadratik
- $1 < \alpha < 2$ için veya $|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n\,|x_n - x^*| \qquad (\varepsilon_n \to 0)$ için **süperlineer**

Örnekler

$\Longrightarrow$: $x_n = (1 + 1/n)^n \to e$ için yakınsaklık **lineer** (çok yavaş yaklaşım)

$$\frac{|x_{n+1} - e|}{|x_n - e|} \to 1$$

$\Longrightarrow$: $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^2 - x_{n-1}^2} \to \sqrt{2}$ için yakınsaklık **süperlineer** (yavaş yaklaşım)

$$\frac{\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right|}{\left|x_n - \sqrt{2}\right|^{1.62}} \leq 0.77$$

$\Longrightarrow$: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} & (n \geq 1) \end{cases}$ için yakınsaklık **kuadratik** (hızlı yaklaşım)

$$\frac{\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right|}{\left|x_n - \sqrt{2}\right|^{2}} \leq 0.36$$

- $[x_n]$ ve $[\alpha_n]$ iki farklı dizi olsun. Eğer $n \geq n_0$ iken $|x_n| \leq C\,|\alpha_n|$ olacak şekilde C ve n_0 sabitleri var ise, bu durumda

$$x_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$$

yazarız ve x_n "büyük o α_n" olarak okuruz.

- $[x_n]$ ve $[\alpha_n]$ iki farklı dizi olsun. Eğer $n \geq n_0$ iken $|x_n| \leq C\,|\alpha_n|$ olacak şekilde C ve n_0 sabitleri var ise, bu durumda

$$x_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$$

yazarız ve x_n "büyük o α_n" olarak okuruz.

- $$x_n = o(\alpha_n)$$

eşitliğinin anlamı, sezgisel olarak, $\lim_{n\to\infty}(x_n/\alpha_n) = 0$ demektir. Bunu da x_n "küçük o α_n" olarak okuruz. Sıfırla bölmeden kaçınmak için daha dikkatli bir tanımlama; bazı $\varepsilon_n \geq 0$ için $\varepsilon_n \to 0$ ve $|x_n| \leq \varepsilon_n\,|\alpha_n|$ olmalıdır.

$$\frac{n+1}{n^2} = \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \tag{1}$$

$$\frac{1}{n \ln n} = o(\frac{1}{n}) \tag{2}$$

$$\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\ln n}) \tag{3}$$

$$\frac{5}{n} + e^{-n} = \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \tag{4}$$

$$e^{-n} = o(\frac{1}{n^2}) \tag{5}$$

$$\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \tag{6}$$

yazabiliriz. Bu, çok **yavaş yakınsaklık** için bir örnektir. Diğer yandan

$$e^x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k = \mathcal{O}(\frac{1}{n!}) \qquad |x| \leq 1 \tag{7}$$

olur ki bu da çok **hızlı yakınsaklık** için bir örnektir.
Yukarıda verilen gösterimler dizilerin yanısıra, fonksiyonlar için de kullanılırlar. Örneğin,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \qquad (x \to 0) \tag{8}$$

yazabiliriz. Bunun anlamı; $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq C \left|x^5\right|$ olacak şekilde 0 ın bir komşuluğu ve bir C sabiti vardır.

5. Hızlarını inceleyiniz:

$x_n = (1 + 1/n)^n$	$x_1 = 2.00000\ 0$ $x_{30} = 2.67431\ 9$ $x_{50} = 2.69158\ 8$ $x_{1000} = 2.71692\ 4$
$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^2 - x_{n-1}^2}$	$x_1 = 2,\ x_2 = 1.5$ $x_3 = 1.42857\ 1$ $x_4 = 1.41463\ 4$ $x_5 = 1.41421\ 4$ $x_6 = 1.41421\ 6$
$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$	$x_1 = 2.00000\ 0$ $x_2 = 1.50000\ 0$ $x_3 = 1.41666\ 7$ $x_4 = 1.41421\ 6$

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
main(){
int n;
double x,x1;
for (n=1;n<1001;n++){
    x1=(1.+1./double(n));
    x=pow(x1,double(n));
    printf( "%d   %.20f \n",n ,x);
}
getchar();
}
```

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
main(){
int n;
double x,x2=1.5,x1=2.0;
for (n=1;n<7;n++){
    x=x2-(x2*x2-2.)*((x2-x1)/(x2*x2-x1*x1));
    printf( "%d   %.20f \n",n ,x);
    x1=x2;
    x2=x;
}
getchar(); }
```

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
main(){
int n;
double x=2.0;
for (n=1;n<7;n++){
    x=x/2.+1./x;
    printf( "%d   %.20f \n",n ,x);
   }
getchar();
}
```