NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

- Çok farklı durumlara uygulanabilen genel bir yöntemdir.
- Reel değişkenli, reel-değerli bir fonksiyonun bir sıfırını bulmaya odaklarsak, yöntem **Newton-Raphson yinelemesi (iterasyonu)** olarak adlandırılır.
- Yarılama yöntemi ve kiriş yöntemine göre daha hızlıdır, çünkü yakınsaklığı lineer veya süperlineer olmak yerine karesel (ikinci basamaktan) dir.
- Maalesef yöntem yakınsakılığı her zaman garanti etmez. Çoğu zaman, Newton yöntemi, nümerik global yakınsak olan bir melez yöntemde, daha yavaş olan diğer yöntemlerle birlikte kullanılır.

f nin bir sıfırı r, ve x de r ye bir yaklaşım olsun. Eğer f'' mevcut ve sürekli ise, bu durumda Taylor Teoreminden, $h = r - x$ olmak üzere,

$$0 = f(r) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

dir. Eğer h küçük (yani x, r ye yakın) ise $\mathcal{O}(h^2)$ terimini ihmal edilir ve kalan denklem h ya göre çözülürse $h = -f(x)/f'(x)$ bulunur.
Böylece, eğer x, r ye bir yaklaşım ise, bu durumda $x - f(x)/f'(x)$, r ye daha iyi bir yaklaşım olmalıdır.
Newton yöntemi, r ye bir x_0 başlangıç tahmini ile başlar ve ardışık olarak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0) \tag{1}$$

ile tanımlanır.

girdi $x_0, M, \delta, \varepsilon$
$v \leftarrow f(x_0)$
çıktı $0, x_0, v$
eğer $|v| < \varepsilon$ **ise dur**
$k = 1$ **den** M **ye döngü**
    $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$
    $v \leftarrow f(x_1)$
    çıktı k, x_1, v
    eğer $|x_1 - x_0| < \delta$ **veya** $|v| < \varepsilon$ **ise dur**
    $x_0 \leftarrow x_1$
döngü sonu

Örnek

$f(x) = e^x - 1.5 - \tan^{-1} x$ fonksiyonunun negatif sıfırını bulmak için, çift-duyarlı hesaplamayla, Newton yöntemi kullanınız.

k	x	$f(x)$
0	$-7.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	-0.702×10^{-1}
1	$-10.67709\ 61766\ 40013\ 99296\ 98438\ 6$	-0.226×10^{-1}
2	$-13.27916\ 73756\ 32712\ 90859\ 78631\ 9$	-0.437×10^{-2}
3	$-14.05365\ 58542\ 69238\ 73474\ 83175\ 3$	-0.239×10^{-3}
4	$-14.10110\ 99568\ 66413\ 47616\ 31270\ 6$	-0.800×10^{-6}
5	$-14.10126\ 97709\ 39415\ 94621\ 57950\ 6$	-0.901×10^{-11}
6	$-14.10126\ 97727\ 39968\ 42508\ 30031\ 4$	-0.114×10^{-20}
7	$-14.10126\ 97727\ 39968\ 42531\ 15512\ 2$	0.000
8	$-14.10126\ 97727\ 39968\ 42531\ 15512\ 2$	0.000

Çıktılar, yinelemelerin hızlı yakınsaklığını göstermektedir

Newton yöntemi **fonksiyonun lineerleştirilmesinden** oluşur. Yani f bir lineer fonksiyon ile değiştirilmektedir.
Bunun için fonksiyon, Taylor serisindeki ilk iki terim ile değiştirilir:

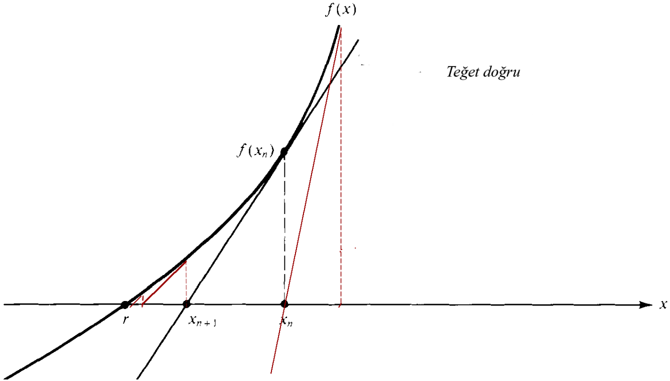
$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \cdots$$

ise, bu durumda (c deki) lineerleştirme,

$$\ell(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

lineer fonksiyonunu doğurur. Dikkat edilirse c komşuluğunda ℓ, f ye iyi bir yaklaşımdır, ve aslında $\ell(c) = f(c)$ ve $\ell'(c) = f'(c)$ dir. O halde, lineer fonksiyon c noktasında f ile aynı değere ve aynı eğime sahiptir. Böylece, Newton yönteminde; r ye yakın bir noktada f nin teğetini oluşturuyoruz ve teğet doğrunun x-eksenini kestiği noktayı buluyoruz.

$$l(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$



$e_n = x_n - r$ diyelim. (Yuvarlama hatalarını *düşünmüyoruz.*) f'' nün sürekli, ve r nin **basit bir sıfır**, yani $f(r) = 0 \neq f'(r)$ olduğunu kabul edelim. Newton iterasyonlarının tanımından

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \tag{2}$$

olur. ξ_n, x_n ile r arasında bir sayı olmak üzere, Taylor Teoreminden,

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \tfrac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n)$$

dir. Bu eşitliğin düzenlenmesi ile $e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n^2$ olur. Bunu Denklem (2) de yazarsak

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2 = C e_n^2 \tag{3}$$

bulunur.

Yöntemin hâlâ yakınsaklığını oluşturmak durumundayız. İspatı Denklem (3) den vermek kolaydır: Eğer e_n küçük ve eğer $\frac{1}{2}f''(\xi_n)/f'(x_n)$ çarpanı çok büyük değilse, bu durumda e_{n+1}, e_n den daha küçüktür. δ ya bağlı bir $c(\delta)$ değerini

$$c(\delta) = \frac{1}{2}\max_{|x-r|\leq\delta}\left|f''(x)\right| / \min_{|x-r|\leq\delta}\left|f'(x)\right| \qquad (\delta > 0) \tag{4}$$

ile tanımlayalım. δ yı, Denklem (4) deki böleni pozitif yapacak şekilde seçelim ve gerekirse δ yı $\delta c(\delta) < 1$ olacak şekilde küçültelim. δ, 0 a yakınsarken $c(\delta)$ da $\frac{1}{2}f''(r)/f'(r)$ ye ve böylece $\delta c(\delta)$ da 0 a yakınsadığından, bu mümkündür. Sabitlenmiş δ için $\rho = \delta c(\delta)$ alalım. Newton iterasyonuna $|x_0 - r| \leq \delta$ olacak şekilde bir x_0 ile başladığımızı kabul edelim. Bu durumda $|e_0| \leq \delta$ ve $|\xi_0 - r| \leq \delta$ dır. Böylece, $c(\delta)$ nın tanımından

$$\frac{1}{2}\left|f''(\xi_0)/f'(x_0)\right| \leq c(\delta)$$

dır.

O halde, Denklem (3) den

$$|x_1 - r| = |e_1| \leq e_0^2 c(\delta) = |e_0|\,|e_0|\,c(\delta) \leq |e_0|\,\delta c(\delta) = |e_0|\,\rho < |e_0| \leq \delta$$

olur. Bu ise, bir sonraki nokta olan x_1 in de r nin δ birim komşuluğunda kaldığını gösterir. Buradan, aynı düşünce tekrarlanarak

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq \rho\,|e_0| \\ |e_2| &\leq \rho\,|e_1| \leq \rho^2\,|e_0| \\ |e_3| &\leq \rho\,|e_2| \leq \rho^3\,|e_0| \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve böylece, genel olarak

$$|e_n| \leq \rho^n\,|e_0|$$

elde edilir. $0 \leq \rho < 1$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \rho^n = 0$ ve böylece $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ bulunur.

Bu yapılanların özeti olarak Newton yöntemi için aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem (Newton Yöntemi)

f'' sürekli ve r, f nin bir basit kökü olsun. Bu durumda r nin bir komşuluğu ve bir C sabiti vardır öyle ki; eğer Newton yöntemi o komşulukta başlatılırsa, ardışık noktalar r ye kararlı bir şekilde yaklaşır ve

$$|x_{n+1} - r| \leq C(x_n - r)^2 \qquad (n \geq 0)$$

eşitsizliğini sağlar.

Bazı durumlarda, Newton yöntemi *keyfi* bir başlangıç noktasından da yakınsaklığı garanti eder. Böyle bir teorem örneğini verelim:

Teorem (Bir Konveks Fonksiyon için Newton Yöntemi)

Eğer f, $C^2(\mathbb{R})$ de artan, **konveks** $(f''(x) > 0)$ *ve bir sıfıra sahipse, bu durumda bu sıfır tektir ve herhangi bir başlangıç noktası için Newton yöntemi bu sıfıra yakınsaktır.*

İspat

f artan olduğundan, $\mathbb{R}$ de $f' > 0$ olur. Denklem (3) den, $e_{n+1} > 0$ ve böylece, $n \geq 1$ için $x_n > r$ dir. f artan olduğundan, $f(x_n) > f(r) = 0$ dır. Böylece, Denklem (2) den, $e_{n+1} < e_n$ dir. Buradan, $[e_n]$ ve $[x_n]$ dizileri azalan ve alttan (sırası ile 0 ve r ile) sınırlıdır. O halde, $e^* = \lim_{n\to\infty} e_n$ ve $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ limitleri mevcuttur. Denklem (2) den $e^* = e^* - f(x^*)/f'(x^*)$ ve böylece $f(x^*) = 0$ ve $x^* = r$ olur. ■

Örnek

Newton yöntemini kullanarak karekökleri hesaplamak için etkili bir yöntem bulunuz.

Çözüm

$R > 0$ ve $x = \sqrt{R}$ alalım. Böylece x, $x^2 - R = 0$ denkleminin bir köküdür. Eğer, (1)-Newton yöntemini $f(x) = x^2 - R$ fonksiyonuna uygularsak, iterasyon formülü

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right)$$

şeklinde yazılabilir. (Bu formül oldukça eski olup, M.Ö. 100 ve M.S. 100 yılları civarında yaşamış Eski-Yunan mühendis ve mimarı Heron'a atfedilir.)

Eğer, örneğin, $\sqrt{17}$ yi hesaplamak istersek ve $x_0 = 4$ ile başlarsak, (sadece doğru rakamları sergilemek için yuvarlanmış formda verilen) ardışık yaklaşımlar aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.12 \\ x_2 &= 4.12310\ 6 \\ x_3 &= 4.12310\ 56256\ 177 \\ x_4 &= 4.12310\ 56256\ 17660\ 54982\ 14098\ 56 \end{aligned}$$

x_4 ile verilen değer 28 göstergeye kadar doğru olup, anlamlı rakamların ikiye katlanması beklentisini sonuçlardan görmekteyiz.

Eğer x önceden verilmişse, bu durumda $G(x, y) = 0$ denklemi Newton yöntemi kullanılarak y ye göre çözülebilir. Uygun bir y_0 başlangıç noktasından başlayarak, $y_1, y_2, \ldots$ yi

$$y_{k+1} = y_k - G(x, y_k) \Big/ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_k)$$

ile tanımlarız. Bu yöntem, $y(x)$ fonksiyonunun bir tablosunu oluşturmak için kullanılabilir. Eğer tablo bir (x_n, y_n) girdisi içeriyorsa, ve hemen yanındaki (x_{n+1}, y_{n+1}) girdisini hesaplamayı arzu ediyorsak, Newton iterasyonunu (x_{n+1}, y_n) ile *başlatırız*. İterasyonun *sonucu* $G(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0$ denklemini sağlayan y_{n+1} doğru değeri olacaktır. $G(x_n, y_n) = 0$ ve x_{n+1}, x_n e yakın olduğundan, $G(x_{n+1}, y_n)$ nin küçük olduğunu, ve Newton iterasyonunda bir kaç adımın, $G(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0$ kesin eşitliğini sağlayacak şekilde, y_n de düzeltme yapacağını bekleyebiliriz.

Lineer olmayan denklem sistemleri için Newton yöntemi, tek denklem için kullanılan stratejiyi takip eder.İki değişken içeren bir denklem sistemiyle bunu gösterelim:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

(x_1, x_2) nin (5) sisteminin bir yaklaşık çözümü olduğunu kabul ederek, $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)$ daha iyi bir yaklaşık çözüm olacak şekilde h_1 ve h_2 düzeltmelerini hesaplayalım. İki değişkenli Taylor açılımında sadece lineer terimleri kullanarak

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_1(x_1, x_2) + h_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 = f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_2(x_1, x_2) + h_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{cases} \tag{6}$$

elde ederiz. (6) da görünen kısmi türevler (x_1, x_2) de hesaplanacaktır. (6) sistemi, h_1 ve h_2 yi belirleyecek bir *lineer* denklem çifti oluşturur.

Katsayılar matrisi, f_1 ve f_2 nin Jakobiyen matrisi

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_1 \end{bmatrix}$$

dir. (6) yı çözmek için J nin tekil olmaması gerekir. Eğer bu durum geçerliyse, çözüm

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, iki değişkenli, lineer olmayan iki denklem için Newton yöntemi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

olup, burada $\begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix}$ değerleri $J \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$ sisteminden çözülür

Genel durum:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{7}$$

denklem sistemi, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ve $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ olmak üzere, basitçe

$$F(X) = 0 \tag{8}$$

formunda ifade edilebilir. Bu durumda (6) sisteminin benzeri

$$0 = F(X + H) \approx F(X) + F'(X)H \tag{9}$$

olup, burada $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$ ve

$$F'(X) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}$$

H düzeltme vektörü, (9)-lineer denklem sistemini çözerek elde edilir. Teorik olarak bunun anlamı

$$H = -F'(X)^{-1}F(X) \tag{10}$$

dir, fakat (10) da daha masraflı olan ters matris hesabı yapmak yerine, genellikle H Gauss yoketme yöntemi ile (9) dan belirlenir. Böylece, n değişkenli, lineer olmayan n denklem için Newton yöntemi

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + H^{(k)} \tag{11}$$

ile verilir. Burada, Jakobiyen sistem

$$F'(X^{(k)})H^{(k)} = -F(X^{(k)}) \tag{12}$$

dır.

Örnek

$(1,1,1)^T$ ile başlayarak,

$$\begin{cases} xy = z^2 + 1 \\ xyz + y^2 = x^2 + 2 \\ e^x + z = e^y + 3 \end{cases}$$

lineer olmayan sisteminin bir kökünü bulmak için Newton yönteminde altı adım kullanınız.

Çözüm

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_3^2 - 1 \\ x_1x_2x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 - 3 \end{bmatrix}$$ *diyelim. Kısmi*

türevler alınırsa, $$F'(X) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & -2x_3 \\ x_2x_3 - 2x_1 & x_1x_3 + 2x_2 & x_1x_2 \\ e^{x_1} & -e^{x_2} & 1 \end{bmatrix}$$ *Jakobiyen*

matrisi elde edilir.

Çözüm (*Devam*)

$X^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ *başlangıç değerini kullanarak, Denklem (11) ve (12) ile verilen Newton yöntemini kullanarak aşağıdakileri elde ederiz:*

n	x_1	x_2	x_3
0	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
1	2.18932 60	1.59847 51	1.39390 06
2	1.85058 96	1.44425 14	1.27822 40
3	1.78016 11	1.42443 59	1.23929 24
4	1.77767 47	1.42396 09	1.23747 38
5	1.77767 19	1.42396 05	1.23747 11
6	1.77767 19	1.42396 05	1.23747 11

■

Newton yönteminin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

eşitliğiyle tanımlandığını hatırlayalım. Newton yönteminin zorluklarından birisi, sıfırı aranan fonksiyonun türevini içermesidir. Bu dezavantajı halletmek için bir çok yöntem önerilmiştir. Örneğin, Steffensen iterasyonu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

bu probleme bir yaklaşımdır. Bir başkası, Denklem (1) de $f'(x)$ i,

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{2}$$

gibi bir **fark oranı** ile değiştirmektir. Denklem (2) de verilen yaklaşım, doğrudan $f'(x)$ in limit tanımından, yani

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

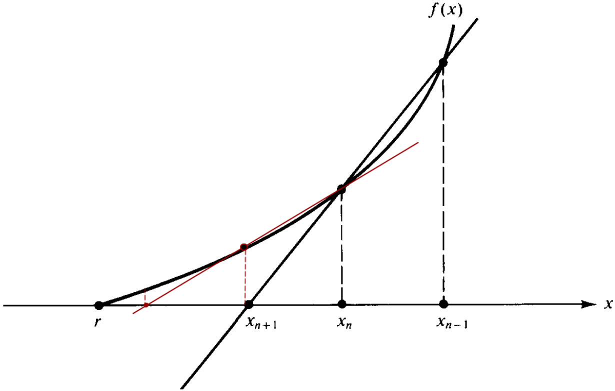
den gelmektedir.

Newton iterasyonunda bu değişim yapıldıktan sonra ortaya çıkan algoritma **kiriş yöntemi** olarak adlandırılan

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (n \geq 1) \tag{3}$$

iterasyon formülüdür. x_{n+1} in hesabı, x_n ve x_{n-1} i gerektirdiğinden, ilk başta iki başlangıçta koşulu verilmelidir. Bunun la beraber, her bir yeni x_{n+1} sadece bir yeni f hesabına gerek duyar. (Steffensen algoritması, her bir yeni x_{n+1} için iki yeni f hesabına gerek duymaktadır.)

Kiriş yönteminin grafiksel yorumu, Newton yöntemininkine benzerdir. Eğrinin teğet doğrusu, bir kiriş doğru ile değiştirilir.



Kiriş yönteminde ardışık yinelemeler yapıdığında, $e_n = x_n - r$ için

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = C e_n e_{n-1}$$

elde ederiz. Kiriş yönteminin **yakınsaklık basamağını** keşfetmek için A bir sabit olmak üzere

$$|e_{n+1}| \sim A\,|e_n|^{\alpha}$$

asimtotik bağıntısının gerçek olduğunu varsayarsak (bu bağıntının anlamı; $n \longrightarrow \infty$ için $|e_{n+1}| / (A\,|e_n|^{\alpha})$ nın 1 e gitmesi ve α-yıncı basamaktan yakınsaklığı sağlamasıdır), kiriş yöntemi için

$$|e_{n+1}| \approx A\,|e_n|^{(1+\sqrt{5})/2}$$

buluruz. (süperlineerlik)

$(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62 < 2$ olduğundan, kiriş yönteminin yakınsaklık hızı Newton yöntemininki kadar iyi değildir fakat yarılama yöntemininkinden daha iyidir. Fakat, Newton yönteminin her yeni adımı *iki* yeni–$f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyon hesabı gerektirirken, kiriş yönteminin her yeni adımı sadece *bir* yeni fonksiyon hesabına gereksinim duyar. Kiriş yönteminin iki adımı için

$$|e_{n+2}| \sim A\,|e_{n+1}|^{\alpha} \sim A^{1+\alpha}\,|e_n|^{\alpha^2} = A^{1+\alpha}\,|e_n|^{(3+\sqrt{5})/2}$$

olur. Bu ise, $(3+\sqrt{5})/2 \approx 2.62$ olduğundan, Newton yönteminin karesel

yakınsaklığına göre *daha iyi* görünmektedir. Şüphe yok ki, kiriş yönteminin iki adımı ise, her bir iterasyonda, daha fazla iş gerektirecektir!

girdi $a, b, M, \delta, \varepsilon$

$fa \leftarrow f(a); \quad fb \leftarrow f(b)$

çıktı $0, a, fa$

çıktı $1, b, fb$

$k = 2$ **den** M **ye döngü**

  eğer $|fa| > |fb|$ **ise**

    $a \leftrightarrow fa; \quad b \leftrightarrow fb$

  koşul sonu

  $s \leftarrow (b - a)/(fb - fa)$

  $b \leftarrow a$

  $fb \leftarrow fa$

  $a \leftarrow a - fa * s$

  $fa \leftarrow f(a)$

  çıktı k, a, fa

  eğer $|fa| < \varepsilon$ **veya** $|b - a| < \delta$ **ise dur**

döngü sonu