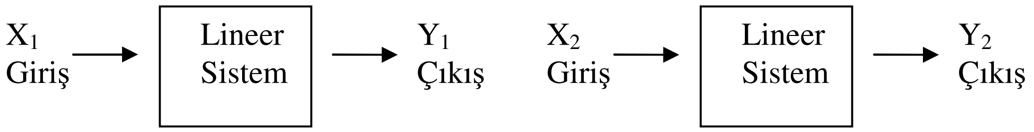
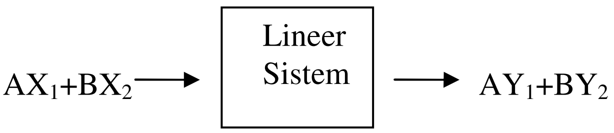
*Bölüm 8*

## KONVOLÜSYON - BİRİM İMPULS CEVABI - TRANSFER FONKSİYONU

Bütün filtreler, elektronik amplifikatörler, dijital operatörler lineer sistem oluştururlar. Bunun anlamı:

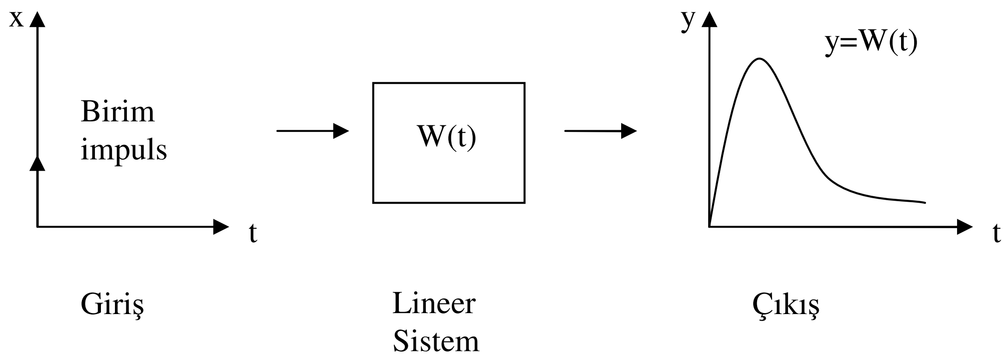



ise:




olur.

Giriş birim impuls (dirac) ise: çıkışa birim impuls cevabı denir.




Bu W(t) lineer sistemi karakterize eder.

$$y(t) = W(t) = \int_0^{\infty} W(\tau)x(t-\tau)\partial\tau$$

şeklinde gösterilir. Eğer lineer sistem bir filtre ise ve giriş x(t) şeklinde bir zaman fonksiyonu ise:

$$y(t) = W(t) = \int_0^{\infty} W(\tau)x(t-\tau)\partial\tau = W(t) * x(t)$$

konvolüsyon işlemi zaman ortamında :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{W(t)} \longrightarrow y(t)$$

Giriş Filtre Çıkış

gibi bir filtreleme işlemi yapmış olur. x(t), w(t) dijital olarak verilmişse:

$$y_\tau = \Delta t \sum_{t=0}^{m} W_t x_{\tau-t}$$

olarak gösterilir.

**Örnek:** W(t)=$w_0$, $w_1$, $w_2$, ... x(t)=$x_0$, $x_1$, $x_2$, ... olsun.

$y_0 = x_0 w_0$; $y_1 = x_0 w_1 + x_1 w_0$; $y_2 = x_0 w_2 + x_1 w_1 + x_2 w_0$ ... şeklinde çıkar.

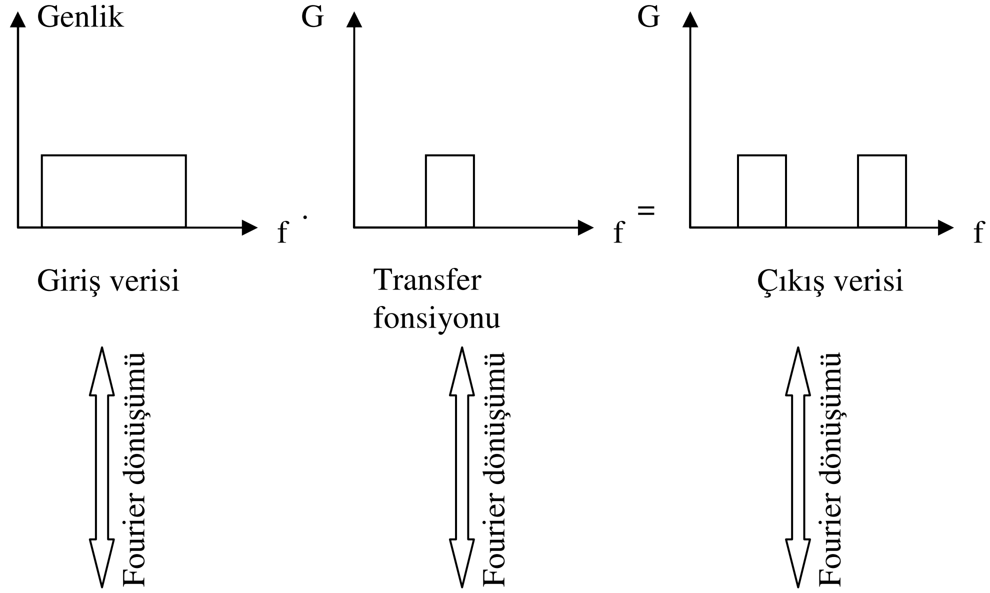
## 8.1. TRANSFER FONKSİYONU

$X(\omega) = \int X(t)e^{-\omega t}\partial t$ ; $W(\omega) = \int W(t)e^{-\omega t}\partial t$ ; $Y(\omega) = \int Y(t)e^{-\omega t}\partial t$ olsun. Zaman ortamında konvolüsyon frekans ortamında çarpıma denk geldiğinden:

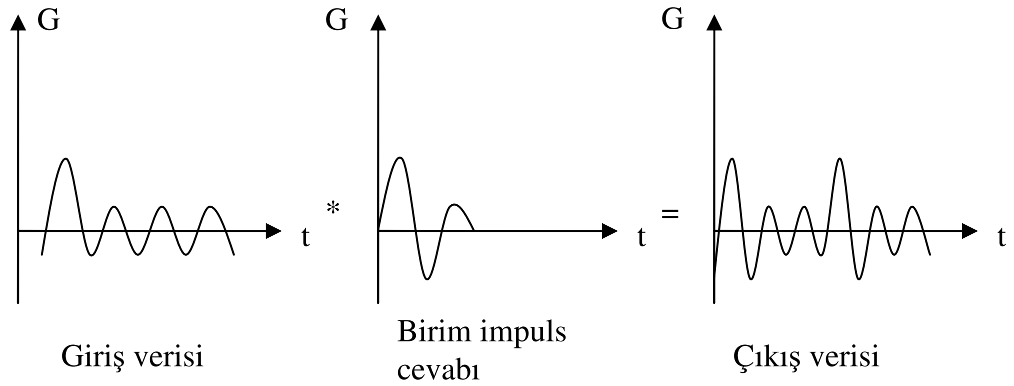
$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot W(\omega) \rightarrow W(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

olur. $W(\omega)$ transfer fonksiyonu adını alır. Özet olarak gösterirsek:

Frekans ortamında filtre:




Zaman ortamında filtre:




## 8.2. DEKONVOLÜSYON (TERS FİLTRE)

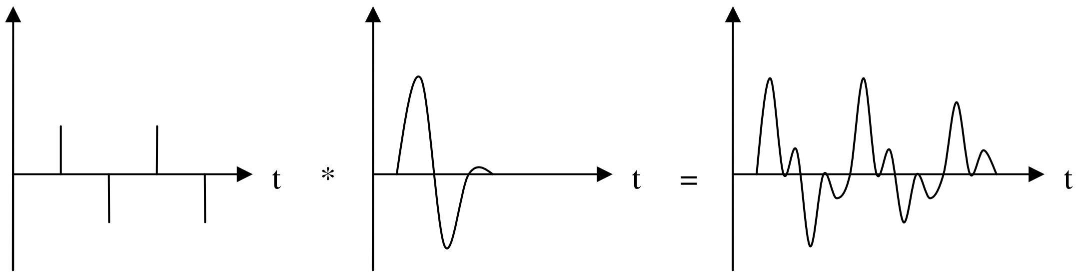
X(t)*W(t)=Y(t) olsun. (X(t) yansıma katsayıları serisini; W(t) sinyali; Y(t) ise sismik kaydı temsil ediyor.) Ancak biliyoruz ki sinyal periyodu büyükse sismik kayıt da büyük periyodlu olur ve ince tabakaları ayırım gücü azalır. Onun için biz elimizdeki y(t) verisinden x(t) veya ona çok yakın yeni bir veri elde etmek istiyoruz. Eğer bunu yapabilirsek yüksek bir veri elde etmiş oluruz. Bunun için y(t) sismik kaydını a(t) gibi filtre fonsiyonu (birim impuls cevabı) ile konvoküsyon yapalım ve bu bize x(t) yi versin. Yani;

x(t)=a(t)*y(t)

olsun. İşte y(t) kayıt verisinden x(t) ye veya x(t) ye yakın bir değere geri dönmek için yapılan bu ters filtre işlemine (Konvolüsyonun zaman ortamında bir filtre olduğunu biliyoruz.) dekonvolüsyon denir. Eğer a(t) yi bulabilirsek dekonvolüsyonu gerçekleştirebiliriz. x=a*y=a*w*x bağıntısından;

a*w=$\delta$ (bitrim impuls=dirac)

olması gerektiği ortaya çıkar.



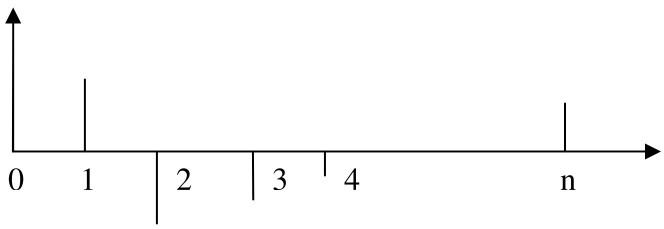

Yansıma katsyıları serisi

Sinyal

Sismik kayıt

X(t) * W(t) = Y(t)

## 8.3. Z TRANSFORMU




$a(t) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + an$

şeklinde bir zaman serisi olsun. a(t) nin z transformu;

$$a(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

olur. W nin z transformu da:

$$W(z) = W_0 + W_1 z^1 + W_2 z^2 + \cdots + W_m z^m$$

şeklindedir. Zaman ortamında konvolüsyon z transformunda çarpmaya karşı gelir. Buna göre:

$$a(t) * W(t) = \delta \rightarrow a(z) \cdot W(z) = 1$$

olur. (δ nin Fourier transformu birdir.) O halde:

$$a(z) = \frac{1}{W(z)}$$

olur. Buradan W(z) yi biliyorsak a(z) yi elde edebiliriz. Bunu basit bir örnekle gösterelim.

W(t) iki dijitten itibaren bir değer olsun. (Bunu hesaplama kolaylığı için yapıyoruz.)

W(t)=1, $W_n$ şeklinde alalım.
W(z)=1+$W_1$z olur.

$$1 \quad \begin{array}{|l} 1 + W_1 z \\ \hline 1 - W_n z + W_n^2 z^2 - W_n^3 z^3 + \cdots \end{array}$$

bulunur. O halde ters filtre operatörünün terimleri z nin katsayıları olan olacaktır. Ancak bölme işlemini bir yerde durdurmak gerekir. Bunun sonucu olarak da x(t) yaklaşık olarak elde dilir. Yani;

$$X(t) \cong \underbrace{(1, -W_n)}_{a(t)} * Y(t)$$

olur. Demekki ters filtre operatörünü bulmak için bir yaöntem bölme yöntemidir. Ancak bölme işlemi sonucu bulunan $1, -W_n, +W_n^2, -W_n^3, \cdots$ değerlerinin gittikçe küçülerek sıfıra yaklaşan dğerler olması gerekir. Aksi halde bölme işlemini bir yerde kesmemizin anlamı olmaz. Böyle bir operatör stabl (dengeli) değildir denir. Operatörün stabl olması için birinci terimin diğer terimlerden büyük olması gerkit. Örnek olarak aldığımız $(1,W_n)$ sinyalinde $1>W_n$ olmalıdır. Öğrenci $(W_n)$ e birden büyük ve birden küçük değerler vererek bunu görebilir.

## 8.4. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE DEKONVOLÜSYON

İkinci göreceğimiz ve endüstride en çok kullanılan yöntem budur. Bölme yönteminde de gördüğümüz gibi operatörü belli bir terim saysısında kestiğimiz için

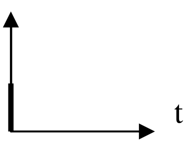
$$a(z) \cdot W(z) \neq 1,$$

$$a(t) * W(t) \neq \delta$$

olur. a(t) yi $\overline{W}(t)$ olarak gösterelim ve $\overline{W}(t)$ serisinin terimleri $\overline{W}(t) = \overline{W}_0, \overline{W}_1, \overline{W}_2, \cdots, \overline{W}_n$ olsun. Bu durumda:

$$\overline{W}(t) * W(t) \neq \delta$$

olacaktır. Hedefimiz mümkün olduğu kadar $\overline{W}(t) * W(t)$ yi δ (dirac) a yaklaştırmaktır. Bu en küçük kareler anlamında $E = \left[\delta - \overline{W} * W\right]^2$ yi minimum yapan $\overline{W}$ yi bulmaktır.

$\delta = [1,0,0,0,\cdots] =$ 


olduğuna göre:

$$E = \left[1,0,0,\cdots \overline{W} * W\right]^2 = \min$$

şeklinde, daha doğrusu $\overline{W} * W$ yi hesaplayarak terimleri yerine koyarsak: [W=(1,$W_n$) olduğuna göre]

$$\left(1, W_n\right) * \left(\overline{W}_0, \overline{W}_1, \overline{W}_2, \cdots\right) = \overline{W}_0, \overline{W}_0 W_n + \overline{W}_1, \overline{W}_1 W_n$$

$$E = \left[\left(1 - \overline{W}_0\right)^2 + \left(0 - \overline{W}_0 W_n\right)^2 + \left(0, \overline{W}_1, W_n\right)^2 \cdots\right] = \text{minimum}$$

olmalıdır. Bunun için:

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{W}_0} = 0\,, \quad \frac{\partial E}{\partial \overline{W}_1} = 0$$

koşulları aranır. E yi açarsak:

$$E = 1 - 2\overline{W}_0 + \overline{W}_0^{\,2}\left(1 + W_n^2\right) + 2\overline{W}_0 \overline{W}_1 W_n + \overline{W}_1^{\,2}\left(1 + W_n^2\right)$$

bulunur. Diğer traftan sinyal (1+$W_n$) nin otokorelasyon fonsiyonunu hesaplayalım ve E yi otokorelasyon fonksiyonunun katsayıları cinsinden yazmaya çalışalım.

(1,$W_n$) nin otokorelasyonu:

$$\begin{array}{ll} & 1 \quad W_n \\ 1 \quad W_n & \end{array} \longrightarrow W_n = \alpha_{-1} \;; \quad \begin{array}{l} 1 \quad W_n \\ 1 \quad W_n \end{array} \longrightarrow 1 + W^2 n = \alpha_0 \;; \quad \begin{array}{ll} 1 \quad W_n & \\ & 1 \quad W_n \end{array} \longrightarrow W_n = \alpha_1$$

bulunur. Görüldüğü gibi otkorelasyon simetrik bir fonksiyondur. Kaymanın sıfır olduğu $\alpha_0$ değeri maksimumdur. O zaman E aşağıdaki gibi olur.

$$E = 1 - 2\overline{W}_0 + \overline{W}_0^{\,2}\alpha_0 + +2\overline{W}_0 \overline{W}_1 \alpha_1 + \overline{W}_1^{\,2}\alpha_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial E}{\partial \overline{W}_0} = -2 + 2\overline{W}_0 \alpha_0 + 2\overline{W}_1 \alpha_1 = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial \overline{W}_1} = 2\overline{W}_0 \alpha_1 + 2\overline{W}_1 \alpha_0 = 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 \overline{W}_0 + \alpha_1 \overline{W}_1 = 1 \\ \alpha_1 \overline{W}_0 + \alpha_0 \overline{W}_1 = 1 \end{array}$$

denklem çifti bulunur. Bunu:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{W_0} \\ \overline{W_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

matris ifadesi şeklinde de yazabiliriz. Buradan:

$$\overline{W_0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha_1^2} = \frac{1 + W_n^2}{1 + W_n^2 + W_n^4},$$

$$\overline{W_1} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0^2 - \alpha_1^2} = \frac{-W_n}{1 + W_n^2 + W_n^2}$$

dekonvolüsyon operatörlerinin değerleri sinyalin otokorelasyon değerleri cinsinden elde edilir. Eğer sinyali(n) dijital alırsak yukarıdaki matris denklemi: sinyal= $= \overline{W_0}, \overline{W_1}, \overline{W_2}, \cdots, \overline{W_n}$ için:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \ddots & & & \\ \alpha_2 & & \alpha_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha_n & & & & \alpha_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{W_0} \\ \overline{W_1} \\ \vdots \\ \\ \overline{W_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{vmatrix}$$

olur. Köşegene göre simetrik otokorelasyon matrisine Topplitz matris denir. Şimdi basit bir örnek üzerinde en küçük kareler yöntemi ile hatanın daha küçük olduğunu gösterelim. $(1, W_n) = (1, -\frac{1}{2})$ olsun.

Bölme sonucu bulunan operatör:

$$1 \quad \Big| \; \frac{1 + W_n z}{1 - W_n z + W_n^2 z^2}$$

‘den ilk iki terimi alırsak 1 ve $-W_n$ yani 1 ve $-\frac{1}{2}$ bulunur. $E = \left(1-\overline{W} * W^2\right)$ hatasını hesaplayalım.

$$\overline{W} * W = \left(1, \frac{1}{2}\right) * \left(1, -\frac{1}{2}\right) = 1, 0, -\frac{1}{4},$$

$$E = \left[(1-1)^2 + (0-0)^2 + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{16} = 0.062$$

bulunur. En küçük kareler yöntemi ile yapılan hata:

$$\overline{W_0} = \frac{1+W_n^2}{1+W_n^2+W_n^4} = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{20}{21},$$

$$\overline{W_1} = \frac{-W_n^2}{1+W_n^2+W_n^4} = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4} = -\frac{8}{21},$$

$$\overline{W} * W = \left(\frac{20}{21}, -\frac{8}{21}\right) * \left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{20}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{4}{21},$$

$$E = \left[\left(1-\frac{20}{21}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{21}\right)^2 + \left(0-\left(-\frac{4}{21}\right)\right)^2\right] = \left[\frac{1}{(21)^2} + \frac{4}{(21)^2} + \frac{16}{(21)^2}\right] = \frac{1}{21} = 0.048$$

çıkar. Görüldüğü gibi bu değer 0.062 den küçüktür.

Dekonvolüsyon yığma sonrası ve yığma öncesi yapılabilir. Dekonvolüsyon yapılmış bir kesit, yukarıda söylediğimiz nedenlerden, yüksek frekans yönünden daha zengin bir görünüm verir.