NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

SAYISAL İNTEGRAL

Simpson Kuralı

Herhangi bir $[a, b]$ aralığı için benzer hesaplamalar, iyi bilinen **Simpson kuralı**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \tag{6}$$

yi verir. Bu formülün çıkarılış şeklinden, Simpson kuralının derecesi ≤ 2 olan her polinom için kesin olduğunu biliyoruz.
Fakat, bu formül sürpriz şekilde, derecesi ≤ 3 olan her polinom için de doğrudur. (Bkz. Problem **7.1.2**, s. 476.) ve hatası bazı $\xi \in (a, b)$ için

$$-\frac{1}{90}\left[(b-a)/2\right]^5 f^{(4)}(\xi)$$

dir.

Aşağıdaki gibi ilerleyerek, hatanın $O(h^5)$ olduğunu görebiliriz. Eğer $h = (b-a)/2$ ise,

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2h} f(x)dx &\approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] \\ &= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) \\ &\quad + \frac{2}{3}h^4 f'''(a) + \frac{100}{3.5!}h^5 f^{(4)}(a) + \cdots\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dersek $F' = f$ olup, Taylor Teoremi ile birlikte Simpson kuralının sol tarafını $F(a+2h)$ olarak, ya da

$$2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) + \frac{2}{3}h^4 f'''(a) + \frac{32}{5!}h^5 f^{(4)}(a) + \cdots$$

şeklinde yazabiliriz. Bu iki açılımı birleştirerek

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(a) - \cdots$$

buluruz.

Çift sayıda altaralığa sahip olan bir bileşik Simpson kuralı çok sık kullanılmaktadır. n çift olmak üzere $x_i = a + ih \qquad h = (b-a)/n \qquad (0 \leq i \leq n)$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx\end{aligned}$$

olur. (6) Simpson kuralını herbir altaralığı uygularsak

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]\end{aligned}$$

formülünü elde ederiz. Hatası: $-\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi), \ \xi \in (a,b)$

Genel İntegral Formülleri

Newton-Cotes formüllerine yol açan yordam

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

tipinde daha genel integral formülleri üretmek için kullanılabilir. Burada w sabitlenmiş herhangi bir **ağırlık fonksiyonu** olabilir. Gerekli olan tek düzenleme,

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)w(x)dx$$

almaktır.

Örnek

Üçüncü dereceden her f polinomu için kesin olan,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx \approx A_0 f\left(-\tfrac{3}{4}\pi\right) + A_1 f\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + A_2 f\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + A_3 f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)$$

formunda bir formülü üretiniz.

Çözüm

$f(x) = x^j \; (0 \leq j \leq 3)$ *alalım. Simetri nedeniyle* $A_0 = A_3$ *ve* $A_1 = A_2$ *dir.*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos x dx = 2A_0 + 2A_1 \\ -4\pi &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx = 2A_0\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)^2 + 2A_1\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)^2 \end{aligned}$$

Bu sistemin çözümü; $A_1 = A_2 = -A_0 = -A_3 = 4/\pi$ *ve formül*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx \approx \frac{4}{\pi}\left[-f(-\tfrac{3}{4}\pi) + f(-\tfrac{1}{4}\pi) + f(\tfrac{1}{4}\pi) - f(\tfrac{3}{4}\pi)\right] \blacksquare$$

Aralıkların Değişimi

$$\int_c^d f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i) \tag{7}$$

sayısal integral formülünün verildiğini varsayalım.

$$\lambda(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c} \tag{8}$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f(\lambda(t))\,dt \\ &\approx \frac{b-a}{d-c}\sum_{i=0}^{n} A_i f(\lambda(t_i)) \\ &= \frac{b-a}{d-c}\sum_{i=0}^{n} A_i f\left(\frac{b-a}{d-c}t_i + \frac{ad-bc}{d-c}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

bulunur.

3. Gauss Tümlemesi

Önceki kesimde, derecesi $\leq n$ olan polinomlar için *kesin* (eşitlik) olan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{1}$$

tipinde tümleme formüllerinin nasıl oluşturulacağını gördük. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nodlarının sabitlenmesi durumunda, (1) formülü her $f \in \Pi_n$ için eşitlik sağlayacak şekilde, katsayılar tek olarak belirlenmişti.

(1) formülü diğerlerine göre daha iyi olacak şekilde bir nod seçiminin olup olamayacağını sormak doğaldır. Örneğin, elde edilecek A_i katsayılarının tümünün aynı olacağı bir özel nod seçimi mevcut olabilir. Eğer $0 \leq i \leq n$ için $A_i = c$ ise, bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx \approx c \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \tag{2}$$

basit formu oluşacağından, Eşitlik (1) in kullanımında daha az aritmetiğe gereksinim olur. (Bu, çarpma sayısında $n+1$ den 1 e iniş sağlar.)

Chebyshev tümleme formülleri

(2) tipindeki formüller sadece $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ve 8 için mevcuttur. Bunlar **Chebyshev tümleme formülleri** olarak bilinirler. $n = 4$ e karşılık gelen formül

$$\alpha = \sqrt{(5+\sqrt{11})/12} \approx 0.83249\ 74870\ 00982$$
$$\beta = \sqrt{(5-\sqrt{11})/12} \approx 0.37454\ 14095\ 53581$$

olmak üzere

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{5}\left[f(-\alpha)+f(-\beta)+f(0)+f(\beta)+f(\alpha)\right] \qquad (3)$$

dır. α ve β nodlarını elde etmek için belirsiz katsayılar yöntemi kullanılabilir. Ayrıca, **derecesi** ≤ 5 olan tüm polinomlar için bu formülün kesin olduğu gösterilebilir.

Hermite tümleme formülü

Aynı katsayılı daha karmaşık formüller de bir şekilde verilebilir. Bir örnek olarak, $F(x) = f(x)\sqrt{1-x^2}$ olmak üzere,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} F\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \tag{4}$$

yi verebiliriz. Bu, **Hermite tümleme formülü** olarak bilinir. Bu formül, $2n$ boyutlu

$$G = \{pw : p \in \Pi_{2n-1}\} \qquad w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

lineer uzayı için kesindir. Bu hedefin sistematik olarak takip edilmesi bizi *Gauss* tümleme formüllerine götürür.

Gauss Tümlemesi

Teori biraz daha genel bir formdaki tümleme kuralları için formüle edilebilir:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{5}$$

Burada w belirlenmiş pozitif bir **ağırlık fonksiyonudur**. $w(x) \equiv 1$ olma durumu, doğal olarak, özel bir önem taşır.

$$A_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \tag{6}$$

olması durumunda (5) formülünün $f \in \Pi_n$ için kesin olduğunu biliyoruz. Üzerlerinde hiçbir *öncül* kısıtlama olmaksızın, elimizde $n+1$ tane A_i bilinmeyeni ve $n+1$ tane x_i nodu olduğu için, derecesi $\leq 2n+1$ olan tüm polinomlar için kesin olacak şekilde, Denklem (5) formunda tümleme formülleri bulunabilir mi?

Teorem (Gauss Tümlemesi)

w pozitif bir ağırlık fonksiyonu ve q polinomu da, herhangi bir $p \in \Pi_n$ için

$$\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0 \qquad (7)$$

*anlamında, Π_n ye w-**dik** olan $(n+1)$. dereceden sıfırdan farklı bir polinom olsun. $x_0, x_1, ..., x_n$ eğer q nun sıfırları ise, bu durumda katsayıları (6) eşitliği ile verilen (5) tümleme formülü her $f \in \Pi_{2n+1}$ için kesindir.*

İspat

$f \in \Pi_{2n+1}$ olsun. f yi q ile bölersek, bir p bölümü ve r kalanı elde ederiz, Böylece,

$$f = qp + r \qquad (p, r \in \Pi_n)$$

olup, $f(x_i) = r(x_i)$ dir. Denklem (7) yi ve Denklem (5) in Π_n nin elemanları için kesin olduğu gerçeğini kullanırsak,

$$\int_a^b fwdx = \int_a^b rwdx = \sum_{i=0}^{n} A_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

elde ederiz.■

q nun köklerinin **basit kökler** oldukları ve $[a, b]$ aralığının içinde kaldıkları görülecektir. (Özel olarak bunlar reel olup, sanal değillerdir.) Bu sonuç aşağıdaki teoremden hemen ortaya çıkmaktadır.

Teorem (İşaret Değişiminin Sayısı)

*w, $C[a,b]$ de pozitif bir ağırlık fonksiyonu olsun. f, $C[a,b]$ nin, Π_n ye w-**dik** olan, sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu durumda (a,b) aralığında f en az $n+1$ kez işaret değiştirir.*

İspat

$1 \in \Pi_n$ *olduğu için,* $\int_a^b f(x)w(x)dx = 0$ *olup, bu* $f(x)$ *in en az bir kez işaret değiştirdiğini gösterir.* $r \leq n$ *olmak üzere,* f *nin sadece* r *kez işaret değiştirdiğini varsayalım.* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r < t_{r+1} = b$ *olmak üzere, herbir* (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_r, t_{r+1}) *alt aralığında* f *tek bir işarete sahip olacak şekilde* t_i *noktalarını seçelim.*

$$p(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - t_i)$$

polinomu da aynı işaret özelliğine sahiptir ve böylece $\int_a^b f(x)p(x)w(x)dx \neq 0$ *dır.* $p \in \Pi_n$ *olduğu için, bu bir çelişkidir.* ∎

Eğer ağırlık fonksiyonu $w(x) = 1$ ve aralık $[-1, 1]$ ise, orjinal olarak Gauss tarafından incelenen duruma sahibiz. $n = 1$ için

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \tag{8}$$

ve $n = 4$ için

$$\begin{aligned}
-x_0 &= x_4 = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}} \approx 0.90617\ 98459\ 38664 \\
-x_1 &= x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}} \approx 0.53846\ 93101\ 05683 \\
x_2 &= 0.0 \\
A_0 &= A_4 = 0.3\left(0.7 + 5\sqrt{0.7}\right) \Big/ \left(2 + 5\sqrt{0.7}\right) \approx 0.23692\ 68850\ 56189 \\
A_1 &= A_3 = 0.3\left(-0.7 + 5\sqrt{0.7}\right) \Big/ \left(-2 + 5\sqrt{0.7}\right) \approx 0.47862\ 86704\ 9936 \\
A_2 &= 128/225 \approx 0.56888\ 88888\ 88889
\end{aligned}$$

olmak üzere (x_i ler Legendre polinomunun kökleri)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_4 f(x_4) \tag{9}$$

Örnek

$[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = 1$ ve $n = 2$ iken Gauss tümleme kuralını bulunuz.

Çözüm

Ardışık Legendre polinomları

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1, \qquad q_1(x) = x \\ q_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3} \\ q_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x \end{aligned}$$

dir. q_3 *ün kökleri olan* 0 *ve* $\pm\sqrt{3/5}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \tfrac{5}{9} f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \tfrac{8}{9} f(0) + \tfrac{5}{9} f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)$$

tümleme formülündeki nodlardır. $5/9$ *ve* $8/9$ *sabitleri belirsiz katsayılar yöntemi ile belirlenebilir. (Bkz. Problem 7.3.21, s. 500.)*