NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

LİNEER SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Gauss algoritması ve değişkeleri $Ax = b$ matris problemini çözmede **doğrudan** yöntemler olarak ifade edilirler. Bunlar sonlu sayıda adımlardan oluşurlar ve yuvarlama hataları dışında tamamiyle duyarlı bir x çözümü üretirler.
Aksine, bir **dolaylı yöntem,** ideal olarak çözüme *yakınsayan* bir vektör dizisi üretir. Belirlenmiş bir duyarlılığa sahip bir yaklaşık çözüm elde edildiğinde veya belli bir sayıda iterasyondan sonra hesap durdurulur. Dolaylı yöntemler hemen hemen her zaman, doğası gereği **iteratif** (**yinelemeli**) yöntemlerdir: Önce belirtildiği gibi diziyi oluşturmak için basit bir yöntem ardarda uygulanır.

Binlerce denklem içeren büyük lineer sistemler için, iteratif yöntemler hız ve bilgisayar belleği gereksinimi açısından doğrudan yöntemlere göre sıklıkla belirgin üstünlüklere sahiptirler. Bazen, eğer duyarlılık istemi katı değilse, kabul edilebilir bir çözüm üretmek için makul sayıda iterasyon yeterli olacaktır. **Seyrek sistemler** (A nın çoğu elemanının 0 olduğu sistemler) için iteratif yöntemler çoğu zaman oldukça verimlidir.

Genel düşünceyi vermek için iki temel iteratif yöntemi açıklayalım.

- İlk yöntem **Jakobi yöntemi** veya **yinelemesi** olarak bilinir. $Ax = b$ sisteminde i. denklemdeki i.bilinmeyen diğerlerine göre çözülerek $x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_j^{(k-1)})$ $(j \neq i, \quad k = 1, 2, \ldots)$denklemleri elde edilir. Başlangıçta, $x_i^{(0)}$ lar çözüm için olası en iyi kestirim olarak seçilir veya basitçe 0 alınırlar. Böylece yukarıdaki denklemler, *geliştirilmiş* değerler olarak umduğumuz, $x_k^{(1)}$ leri üretirler. Bu süreç belirlenmiş bir sayıda veya $(x_i^{(k)})$ vektöründe kesin bir duyarlılık oluşuncaya kadar tekrarlanır.

Örnek

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

lineer sistemini **Jakobi yöntemi** ile çözünüz?

Çözüm

i. denklemdeki i. bilinmeyeni çözersek

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \tfrac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \tfrac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \tfrac{8}{9} x_1^{(k-1)} - \tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

Başlangıçta, $x_1^{(0)} = 0$ *ve* $x_2^{(0)} = 0$ *alırsak,* $x_1^{(1)} = 3/7$ *ve* $x_2^{(1)} = -9/7$ *bulunur. Bu süreç belirlenmiş bir sayıda veya* $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T$ *vektöründe kesin bir duyarlılık oluşuncaya kadar tekrarlanırsa*

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.00000	0.00000
10	0.14865	−0.19820
20	0.18682	−0.24909
30	0.19662	−0.26215
40	0.19913	−0.26551
50	0.19978	−0.26637

$Ax = b$ sisteminin aşağıdaki iterasyonlarla çözümü **Richardson yöntemi** olarak adlandırılır:

$$x^{(k)} = (I - A)x^{(k-1)} + b = x^{(k-1)} + r^{(k-1)}$$

Burada $r^{(k-1)}$,

$$r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$$

ile tanımlanan kalan vektördür. Eğer, bazı bağıl matris normları (örneğin $\|A\| = \sup\{\|Au\| : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\}$) için $\|I - A\| < 1$ ise, Richardson iterasyonu $Ax = b$ ye (limit durumunda) bir çözüm üretecektir.

Örnek

Aşağıdaki problem için, Richardson yönteminde $x = (0,0,0)^T$ dan başlayıp, 100 iterasyon hesaplayınız:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \end{bmatrix}$$

Çözüm

$r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$ *den* $r^{(1)} = (11/18, 11/18, 11/18)^T$ *olup,*
$x^{(k)} = x^{(k-1)} + r^{(k-1)}$ *den* $x^{(1)} = (11/18, 11/18, 11/18)^T$ *bulunur.*
İterasyonlara devam edilirse;

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= (0.00000, 0.00000, 0.00000)^T \\
x^{(1)} &= (0.61111, 0.61111, 0.61111)^T \\
&\vdots \\
x^{(10)} &= (0.27950, 0.27950, 0.27950)^T \\
&\vdots \\
x^{(40)} &= (0.33311, 0.33311, 0.33311)^T \\
&\vdots \\
x^{(80)} &= (0.33333, 0.33333, 0.33333)^T
\end{aligned}
$$