NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Lineer Programlama

- Standart teknikler anlamında bir lineer programlama problemi aşağıdaki formda yazılabilir:

LP PROBLEMİ 2 Lineer Programlama Problemi: İkinci Standart Form

$x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$ ve $A \in R^{m \times n}$ olmak üzere, $Ax = b$, ve $x \geq 0$ kısıtları altında $c^T x$ in maksimum değerini bulunuz.

- Diğer formlarda verilen bir LP problemi bu forma dönüştürülebilir.
- Şimdi bu problemin çözümünü **Simpleks algoritması** adı verilen bir teknikle, bir örnek üzerinde uygulayarak açıklayalım:

Simpleks algoritmasının pratik kullanımı sıklıkla, verilerin belli kurallara göre ardışık adımlarla düzenlen bir **tablo** üzerinde sergilenmesiyle gerçeklenir.

$$\text{Maksimum:} \qquad F(x) = 6x_1 + 14x_2$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + 7x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Simpleks algoritmasını hazırlarken, yapay değişkenler üreterek, problemi aşağıdaki gibi yazalım:

$$\text{Maksimum:} \qquad F(x) = 6x_1 + 14x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 15 \\ x_1 + 7x_2 + x_5 & = 21 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Böylece

$$\text{Maksimum:} \quad F(x) = (6, 14, 0, 0, 0)^T x$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix} \\ x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)^T \geq 0 \end{cases}$$

yazarız. İlk vektörümüz $x = (0, 0, 12, 15, 21)^T$ olacaktır.

Bu verilerin tümü ilk tablo üzerinde özetlenir:

6	14	0	0	0	0
2	1	1	0	0	12
2	3	0	1	0	15
1	7	0	0	1	21
0	0	12	15	21	

Simpleks yönteminin her adımı bir tablo ile başlar. En üst satır F objektif fonksiyonuna ait olan katsayıları içermektedir. $F(x) = c^T x$ in o anki değeri sağ üst köşede gösterilmektedir. Tablodaki sonraki m satır, eşitlik kısıtlarını oluşturan denklem sistemini temsil etmektedir. Sistemin çözüm kümesini değiştirmeden, bu sisteme elemanter satır operasyonları uygulanabileceğini hatırlayalım. Tablonun son satırı, o anki x-vektörünü içerir.

Dikkat edilirse, en üst ve en alt satır kullanılarak, $F(x) = c^T x$ değeri kolaylıkla hesaplanabilir.
Son tablo aşağıdaki genel forma sahiptir:

c^T	0	$F(x)$
A	I	b
x (temel olmayan)	x (temel)	

Tablo Kuralları

Simpleks yönteminde ortaya çıkan herbir tablo şu beş kuralı sağlamak zorundadır:

1. x vektörü mutlaka $Ax = b$ eşitlik kısıtlarını sağlamalıdır.
2. x vektörü mutlaka $x \geq 0$ eşitsizliğini sağlamalıdır.
3. x in (**temel olmayan** değişkenlere ayrılan) 0 değerini alan n bileşeni vardır. Geriye kalan m bileşen genellikle sıfırdan farklıdır ve **temel değişkenlere** ayrılmıştır. (Burada n ve m, yapay değişkenler sunulmadan önceki orjinal problemle ilgili değerlere karşılık gelmektedir.)
4. Kısıtları tanımlayan matristeki herbir temel değişken sadece bir satırda yer alır.
5. Amaç fonksiyonu F temel olmayan değişkenler cinsinden ifade edilmek zorundadır.

Örneğin ilk tablosunda temel değişkenler x_3, x_4 ve x_5 dir. Temel olmayan değişkenler ise x_1 ve x_2 dir. Bu tablo için beş kuralın da doğru olduğunu hemen görebiliriz. Her bir adımda, temel olmayan bir değişkenin bir temel değişken olmasına izin verilerek, $F(x)$ in değerinin artıp artmayacağını görmek için tablo incelenir. Örneğimizde (x_3, x_4, x_5 i uygun şekilde ayarlayarak) x_1 veya x_2 nin artırılmasına izin verirsek, $F(x)$ in değerinin gerçekten artacağı görülmektedir. F deki 14 katsayısı 6 katsayısından daha büyük olduğundan dolayı x_2 deki birim artış, $F(x)$ değerini x_1 deki birim artıştan daha fazla artıracaktır. O halde, x_1 i 0 da sabit tutup, x_2 değerinin mümkün olduğunca fazla artmasına izin vereceğiz. Aşağıdaki kısıtlar uygulanır:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_3 = 12 - x_2 \\ 0 &\leq x_4 = 15 - 3x_2 \\ 0 &\leq x_5 = 21 - 7x_2 \end{aligned}$$

Bu kısıtlar bize

$$x_2 \leq 12 \qquad x_2 \leq 5 \qquad x_2 \leq 3$$

olduğunu söyler.

Bunların en darı $x_2 \leq 3$ eşitsizliği olup, böylece x_2 nin 3 e yükselmesine izin vereceğiz. x_3, x_4 ve x_5 in yeni değerleri verilen üç kısıttan elde edilir. Böylece yeni x-vektörümüz

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T$$

olur. Yeni temel değişkenler x_2, x_3 ve x_4 olup, o halde şimdi bir sonraki tabloyu verilen beş kurala göre belirlemek zorundayız. Kural **5** i sağlamak için, $x_2 = (21 - x_5)/7$ olduğuna dikkat edelim. Bu F de yerine yazıldığında, yeni amaç fonksiyonunu buluruz:

$$\begin{aligned} F(x) &= 6x_1 + 14x_2 \\ &= 6x_1 + 14(21 - x_5)/7 = 6x_1 - 2x_5 + 42 \end{aligned}$$

Kural **4** ü sağlamak için, 7 yi pivot eleman alarak, Gauss elemesi adımlarını (temel satır operasyonlarını) uygularız. Bunun amacı x_2 yi bir denklem hariç tüm tüm denklemlerden yok etmektir. Tüm bu işlemler yapıldıktan sonra, Adım 1 biter ve Adım 2,

6	0	0	0	-2	42
$\frac{13}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	9
$\frac{11}{7}$	0	0	1	$-\frac{3}{7}$	6
1	7	0	0	1	21
0	3	9	6	0	

olan ikinci tablo ile başlamış olur.

Şimdi bize sunulan durum başlangıçtaki duruma benzerdir. Temel olmayan değişkenler x_1 ve x_5 dir. x_5 deki herhangi bir artış F yi küçülteceğinden dolayı, şimdi x_1 in bir temel değişken olmasına izin vereceğiz. O halde, x_5 i 0 da sabit tutup, x_1 in mümkün olduğunca büyük olmasını sağlayalım. Aşağıdaki kısıtlar oluşur:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq x_3 = 9 - (13/7)x_1 \\
0 &\leq x_4 = 6 - (11/7)x_1 \\
0 &\leq 7x_2 = 21 - x_1
\end{aligned}
$$

Bunların sonucu ise

$$
x_1 \leq 63/13 \qquad x_1 \leq 42/11 \qquad x_1 \leq 21
$$

dir.

Yeni temel değişken x_1 in sadece 42/12 ye yükselmesine izin verilir ve x_3, x_4 ve x_2 değerleri tablodan ya da yukarıdaki kısıt eşitsizliklerinden hemen hesaplanır. Yeni x-vektörü

$$x = \begin{bmatrix} 42/11 & 27/11 & 21/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Temel olmayan değişkenler, şimdi x_4 ve x_5 dir. Kural 5 i sağlamak için $x_1 = (7/11)(6 - x_4)$ yerleştirmesini yapalım. Böylece,

$$\begin{aligned} F(x) &= 6x_1 - 2x_5 + 42 \\ &= (42/11)(6 - x_4) - 2x_5 + 42 \\ &= -(42/11)x_4 - 2x_5 + 714/11 \end{aligned}$$

Üçüncü tabloyu tamamlamak gerksizdir, çünkü F deki her iki katsayı da negatiftir. Bu son x değerinin çözüm olduğunu belirtmektedir, çünkü temel olmayan x_4 ve x_5 değişkenlerinden hiç biri $F(x)$ küçülmeden temel değişken haline dönüşemez. O halde, orjinal problemde maksimum değer $F(42/11, 27/11) = 630/11$ olur.

Bu örneği ve yapılan açıklamaları temel alarak, verilen herhangi bir tabloda yapılması gerekenleri şu şekilde özetleyebiliriz:

1. Eğer o anki F deki bütün katsayılar (yani, tablodaki en üst satırın sol tarafı) ≤ 0 ise o anki x çözümdür.
2. F deki katsayısı pozitif ve mümkün olduğunca büyük olan temel olmayan değişkeni seçiniz. Bu değişken yeni temel değişken olur. Ona x_j diyelim.
3. Her bir b_i yi bulunduğu satırdaki yeni temel değişkenin a_{ij} katsayısı ile bölünüz. Yeni temel değişkene atanan değer bu oranların en küçüğüdür. Böylece eğer b_k / a_{kj} en küçük değer ise $x_j = b_k / a_{kj}$ alalım.
4. a_{kj} pivot elemanını kullanarak, Gauss eliminasyon ile A nın j yinci kolonunda 0 lar oluşturunuz.

Örnek

Bir oyuncak şirketi askerler ve trenler olmak üzere iki tip tahta oyuncak üretiyor. 27 dolara satılan bir oyuncak asker için 10$ değerinde ham madde kullanılıyor. Üretilen her oyuncak asker şirketin işçilik değişkenini arttırıp, maliyete ilave olarak 14$ ekliyor. 21$'a satılan bir oyuncak tren için 9$ değerinde ham madde kullanılıyor. Yapılan her oyuncak tren şirketin işçilik değişkenini artırıp, maliyete ilave olarak 10$ ekliyor. Tahta askerlerin ve trenlerin üretiminde marangozluk ve cilalama olmak üzere iki tip işçiliğe gereksinim duyuluyor. Bir askerin üretimi için 2 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Bir trenin yapımında ise 1 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekiyor. Şirket haftalık ihtiyacı olan ham maddeleri bulabildiği halde ancak 100 saat cilalama ve 80 saat marangozluk yapabiliyor. Trenler için talep sınırsız olduğu halde haftada en fazla 40 asker satılıyor. Şirketin haftalık karını ($gelirler - giderler$) maksimum yapmak için bir matematiksel model kurunuz.

Çözüm.
Karar Değişkenleri : Lineer programlama modelinde karar değişkenleri, üzerinde karar verilmesi gereken iki veya daha fazla sayıdaki faaliyeti ifade eder. Açık olarak, şirket her hafta kaç tane oyuncak asker ve trenin üretileceğine karar vermelidir. Bu düşünceyle,

$$\begin{aligned} x_1 &: \text{ haftalık üretilen asker sayısı} \\ x_2 &: \text{ haftalık üretilen tren sayısı} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Objektif (Amaç) Fonksiyonu : Herhangi bir lineer programlama probleminde, karar verici, karar değişkenlerinin bir fonksiyonunu (genellikle gelir veya kârı) maksimum veya (genellikle maliyeti) minimum yapmak ister. Maksimum veya minimum yapılmak istenen bu fonksiyona objektif fonksiyonu denir.

Şirket problemi için sabit maliyetlerin (kiralama ve sigorta gibi) x_1 ve x_2 değerlerine bağlı olmadığını kabul edelim. Böylece şirket ,

$$\begin{aligned}&(\text{Haftalık gelir}) - (\text{Ham maddenin satın alınış maliyeti})\\&\qquad - (\text{Diğer değişken maliyetler})\end{aligned}$$

değerlerini nasıl maksimum yapacağı üzerine yoğunlaşmalıdır.
Şirketin haftalık geliri ve maliyeti x_1 ve x_2 karar değişkenleri cinsinden ifade edilebilir. Şirket için satılacak miktardan daha fazla oyuncak asker üretmek gereksizdir. O halde üretilen bütün oyuncakların satılacağını kabul edersek,

$$\begin{aligned}\text{Haftalık gelir} &= \text{Askerden sağlanan haftalık kazanç}\\&\quad +\text{Trenden sağlanan haftalık kazanç}\\&= 27x_1 + 21x_2\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{Haftalık hammadde maliyeti} &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{Diğer haftalık değişken maliyetler} &= 14x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

dır. Böylece şirket,

$$27x_1 + 21x_2 - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

değerini maksimum yapmaya çalışıyor. O halde şirket $3x_1 + 2x_2$ ifadesini maksimum yapacak x_1 ve x_2 değerlerini bulmalıdır. Böylece matematiksel olarak, amaç fonksiyonu;

$$\text{maksimum: } z = 3x_1 + 2x_2$$

olur.

Kısıtlar: x_1 ve x_2 arttığı sürece şirketin amaç fonksiyonunun değeride artar. Böylece, eğer şirket x_1 ve x_2 değerlerini seçmede özgür olursa bu değerleri çok yüksek tutarak kârını keyfi bir şekilde büyütebilir. Fakat x_1 ve x_2 değerleri aşağıdaki üç kısıtlama ile sınırlıdır.

Kısıt 1: Her hafta 100 saatten fazla cilalama yapılamıyor.
Kısıt 2: Her hafta 80 saatten fazla marangozluk yapılamıyor.
Kısıt 3: Sınırlı talepten dolayı, her hafta en fazla 40 oyuncak asker üretiliyor. O halde Kısıtlar :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Elde bulunan ham madde miktarı sınırsız olarak kabul edildiğinden bu konuda kısıtlama yoktur.

Böylece optimizasyon problemi:

$$\text{maksimum}: \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Kısıtlar}: \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Problem çözüldüğünde $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ ve böylece $z = 180$ elde ederiz. Yani şirket haftada 20 oyuncak asker ve 60 oyuncak tren üretirse kârını maksimum yapacaktır. Bu durumda haftalık kazanç 180 dolar – haftalık sabit giderler olacaktır. Eğer örneğin sabit giderleri haftada 100 dolar ise bu durumda şirketin haftalık kazancı 180-100 = 80 dolar olur.

Örnek

Bir beyaz eşya firması ürünlerini orta gelirli ailelere tanıtmak için televizyon reklamlarına girişimde bulunuyor ve iki tip program içinde 1 dakikalık kısa reklamlar satın almayı düşünüyor: Komedi programları ve futbol maçları. Televizyondaki her komedi programı 400 bin orta gelirli kadın ve 200 bin orta gelirli erkek tarafından izleniyor. Televizyondaki her futbol programı ise 200 bin orta gelirli kadın ve 600 bin orta gelirli erkek tarafından izleniyor. Bir komedi programı içinde yayınlanacak 1 dakikalık reklam için 5,000 TL, futbol programı içinde yayınlanacak 1 dakikalık reklam için ise 10,000 TL lik bir maliyet gerekiyor. Firma, reklamların en az 2 milyon orta gelirli kadın ve 4 milyon orta gelirli erkek tarafından görülmesini istiyor. Firmanın bu amaç doğrultusunda reklam giderlerini nasıl minimum maliyette tutacağına dair bir doğrusal programlama problemi geliştiriniz.

Firma komedi programları ve futbol maçları için ne kadar reklam satın alacağına karar vermelidir. O halde karar değişkenleri,

$$x_1 = \text{satın alınan 1 dakikalık komedi programı reklamı sayısı}$$
$$x_2 = \text{satın alınan 1 dakikalık futbol programı reklamı sayısı}$$

olsun.

Kısıt 1: Reklamlar mutlaka en az 2 milyon orta gelirli kadına ulaşmalı.
Kısıt 2: Reklamlar mutlaka en az 4 milyon orta gelirli erkeğe ulaşmalı.
Optimizasyon problemi z ($\times$bin TL bazında)

$$\text{minimum}: \quad z = 5x_1 + 10x_2$$
$$\text{Kısıtlar}: \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problem, dual problemine simpleks algoritması uygulanarak çözülürse, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ ve böylece $z = 70$ bulunur. Yani, eğer firma 2 dakikalık komedi programı reklamı ve 6 dakikalık da futbol reklamı programı satın alırsa 70 bin TL lik minimum maliyet ile istediğine ulaşır.

Örnek

Bir kişinin tükettiği tüm gıdaların dört "temel besin grubu" nun (çikolata, dondurma, kola ve peynirli kek) birinden gelmesi istenmektedir. Kişi, bu gruplardan kakaolu kek, çikolatalı dondurma, kola ve ananaslı-peynirli kek tüketmek istemektedir. Her bir kakaolu kekin maliyeti 0.8 TL, bir külah çikolatalı dondurmanın maliyeti 0.6 TL, bir şişe kolanın maliyeti 0.7 TL ve ananaslı-peynirli kekin bir diliminin maliyeti de 1 TL dir. Kişi her gün mutlaka en az 500 kalori, 40 gr çikolata, 30 gr şeker ve 20 gr yağ tüketecektir. Her gıdanın birim başına düşen besin içeriği aşağıdaki tablo da gösterilmiştir. Buna göre kişinin günlük besin gereksinimini en az maliyetle sağlayabileceği bir doğrusal programlama modelini formüle ediniz.

	Kalori	Çikolata (gr)	Şeker (gr)	Yağ (gr)
Kakolu Kek	400	30	20	20
Dondurma (1 Külah)	200	20	20	10
Kola (1 şişe)	150	0	40	10
Peynirli kek (1 dilim)	500	0	40	15

Amacımız diyetin maliyetini minimuma indirmektir. Diyetin toplam maliyeti aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned}
\text{(Diyetin toplam maliyeti)} &= \text{(Kakaolu keklerin maliyeti)} \\
&\quad + \text{(Dondurmaların maliyeti)} \\
&\quad + \text{(Kolanın maliyeti)} \\
&\quad + \text{(Peynirli kekin maliyeti).} \\
&= 0.8x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 + x_4
\end{aligned}$$

Böylece, amaç fonksiyonu

$$\text{minimum } z = 0.8x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 + x_4$$

Karar değişkenleri aşağıdaki kısıtları sağlamalıdır.

Kısıt 1: Alınan günlük kalori en az 500 kalori olmalıdır

Kısıt 2: Alınan günlük çikolata en az 40 gr olmalıdır

Kısıt 3: Alınan günlük şeker en az 30 gr olmalıdır

Kısıt 4: Alınan günlük yağ en az 20 gr olmalıdır.

Kısıt 1 i karar değişkenleri cinsinden ifade etmek istersek;

$$
\begin{aligned}
(\text{Alınan günlük kalori}) \quad = \quad & (\text{Kakaolu kekteki kalori}) \\
& +(\text{Çikolatalı dondurmadaki kalori}) \\
& +(\text{Koladaki kalori}) \\
& +(\text{ Ananaslı-peynirli kekteki kalori})
\end{aligned}
$$

olacağından

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$

elde ederiz.

Benzer şekilde Kısıt 2 den,

$$30x_1 + 20x_2 \geq 40,$$

Kısıt 3 den,

$$20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 \geq 30,$$

ve Kısır 4 den,

$$20x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 15x_4 \geq 20,$$

elde ederiz.

O halde problem

$$\text{minimum } z = 0.8x_1 + 0.6x_2 + 0.7x_3 + x_4$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \begin{cases} 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 \\ 30x_1 + 20x_2 \geq 40 \\ 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 \geq 30 \\ 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 15x_4 \geq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

olur. Bu problemin simpleks algoritması ile çözümü $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, olup, böylece $z = 1.1$ olarak elde edilir. O halde istenilen diyet için sadece 1 adet kakaolu kek ve yarım külah çikolatalı dondurma yenilmelidir. Bu minimum maliyetli (1 TL 10 Kr) diyetle günlük $400(1) + 200(1/2) = 500$ kalori, $30(1)+20(1/2) =40$ gr çikolata, $20(1) + 20(1/2) = 30$ gr şeker ve $20(1) + 10(1/2) =15$ gr yağ alınmış olur.