NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Bağlayıcı Fonksiyonlar ve En Küçük Kareler

Bağlayıcı Fonksiyonlar

Bir **bağlayıcı (spline) fonksiyonu,** alt aralıklarda belli süreklilik koşulları ile birbirlerine bağlanan polinom parçaları içerir. Formal olarak, $t_0 < t_1 < ... < t_n$ özelliğini sağlayan $n+1$ tane $t_0, t_1, ..., t_n$ noktasının verildiğini varsayalım. Bu noktalara **düğümler** denir. Ayrıca, bir $k \geq 0$ tamsayısının belirlendiğini farzedelim. $t_0, t_1, ..., t_n$ düğümlerine sahip olan k. **dereceden bir bağlayıcı fonksiyon**;

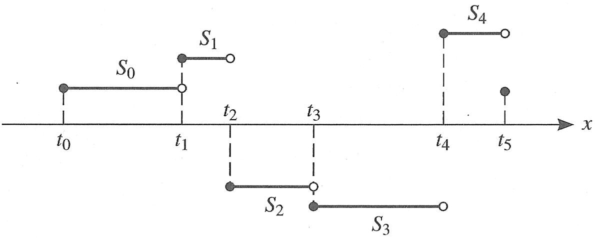
1. Her bir $[t_{i-1}, t_i)$ alt aralığında derecesi $\leq k$ olan bir polinom,
2. $[t_0, t_n]$ de $(k-1)$. dereceden sürekli türeve sahip

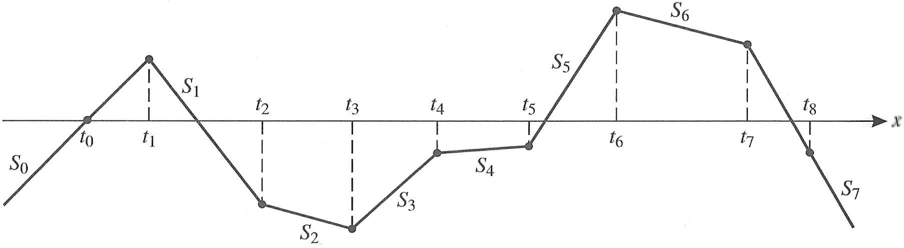
olacak şekilde bir S fonksiyonudur. O halde S, $(k-1)$. basamağa kadar sürekli türevlere sahip olan, en fazla k. dereceden bir parçalı polinomdur.

0. dereceden bağlayıcılar parçalı sabitlerdir. 0. dereceden bir bağlayıcı

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = c_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

açık formunda verilebilir. $[t_{i-1}, t_i)$ aralıklarının birbirlerini kesmemeleri nedeniyle, bu tip bir fonksiyonu düğümlerde tanımlamada bir belirsizlik oluşmaz. 6 düğümlü 0. dereceden bir bağlayıcı, ve 9 düğümlü 1. dereceden bir bağlayıcı şekilde gösterilmiştir.


S_0
S_1
S_2
S_3
S_4
t_0
t_1
t_2
t_3
t_4
t_5
x


S_0
S_1
S_2
S_3
S_4
S_5
S_6
S_7
t_0
t_1
t_2
t_3
t_4
t_5
t_6
t_7
t_8
x

$n+1$ düğümlü tipik bir $1.$ derece bağlayıcı fonksiyonu

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0 & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = a_1 x + b_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer t_i düğümleri ile a_i ve b_i değerlerinin tamamı önceden verilmişse, bu durumda S nin x deki değeri, öncelikle x i içeren $[t_i, t_{i+1})$ alt aralığı belirlenerek elde edilir. Bağlayıcı fonksiyon reel doğrunun tamamı üzerinde tanımlanabilir. Uygunluk için, $(-\infty, t_1)$ aralığında $a_0 x + b_0$ ifadesini ve $[t_{n-1}, \infty)$ aralığında $a_0 x + b_0$ ifadesini kullanabiliriz. S fonksiyonu sürekli olup, böylece parçalı polinomlar nodlarda birleşirler; yani $S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1})$ dir.

Birinci-dereceden $S(x)$ bağlayıcısını hesaplayan bir önkod aşağıdadır:

girdi $(t_i), (a_i), (b_i), x, n$
$i = 1$ **den** $n - 1$ **e döngü**
    eğer $x < t_i$ **ise**
        $S(x) \leftarrow a_{i-1}x + b_{i-1}$
        çıktı $S(x)$
        döngüden çık
    koşul sonu
döngü sonu
$S(x) \leftarrow a_{n-1}x + b_{n-1}$
çıktı $S(x)$