NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Bağlayıcı Fonksiyonlar ve En Küçük Kareler

Kübik Bağlayıcılar

Pratikte sıklıkla kullanılmaları nedeniyle, **kübik bağlayıcılar** ($k = 3$) teorisini ve oluşturulmasını daha bütünlük içinde geliştirelim:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c} x & t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \tag{1}$$

tablosunu interpole eden; S, S' ve S'' sürekli olacak şekilde bir

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \tag{2}$$

$S \in C^2(t_0, t_n)$ fonksiyonu arıyoruz. Burada $S_i(x)$ ler kübik polinomlardır. S_{i-1} ve S_i polinomları t_i noktasında aynı değeri alırlar ve bu nedenle

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \qquad (1 \leq i \leq n-1) \tag{3}$$

olup, o halde S otomatik olarak süreklidir.

S, S' ve S'' nün sürekli olma koşulları bir kübik bağlayıcı tanımlamak için yeterli midir? n tane kübik polinomun herbirinde dört katsayı olduğundan, parçalı kübik polinomda $4n$ tane katsayı vardır. Her bir $[t_i, t_{i+1}]$ alt aralığında iki interpolasyon koşulu, $S(t_i) = y_i$ ve $S(t_{i+1}) = y_{i+1}$, toplamda $2n$ koşul verir. S nin süreklilik koşulları interpolasyon koşulları içinde sayılmış olduğu için, ek koşul oluşturmaz. S' nün sürekliliği herbir iç düğümde bir koşul, $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$, ve toplamda $n-1$ ek koşul verir. Benzer şekilde S'' nün sürekliliği de $n-1$ ek koşul üretir. Böylece $4n$ tane katsayıyı belirlemek için toplamda $4n-2$ koşul hazırdır. Geriye **iki serbestlik derecesi** kalmış olur ki; bu serbestliği avantajlı şekilde kullanmanın çeşitli yolları mevcuttur.

Şimdi $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında $S_i(x)$ i oluşturalım. Öncelikle $z_i = S''(t_i)$ diyelim. Açıkça, $0 \leq i \leq n$ için z_i var olup, S'' herbir iç düğüm noktasında sürekli olduğu için

$$\lim_{x \downarrow t_i} S''(x) = z_i = \lim_{x \uparrow t_i} S''(x) \qquad (1 \leq i \leq n-1) \tag{4}$$

sağlanır. Böylece S_i'', $S_i''(t_i) = z_i$ ve $S_i''(t_{i+1}) = z_{i+1}$ olacak şekilde bir lineer fonksiyon olup denklemi

$$S_i''(x) = \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) \tag{5}$$

ile verilir. Burada $h_i \equiv t_{i+1} - t_i$ dir. Eğer bu ifade iki kez integrallenirse, sonuç S_i nin kendisi olacaktır:

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x) \tag{6}$$

Burada C ve D integral sabitleridir.

Şimdi, C ve D yi belirlemek için $S(t_i) = y_i$ ve $S(t_{i+1}) = y_{i+1}$ interpolasyon koşulları (6) da kullanılırsa, sonuç

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1}-x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-t_i)^3 \\ &+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x-t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-x) \end{aligned} \tag{7}$$

olur. Denklem (7) de kolayca kontrol edilebilir. İnterpolasyon koşullarının gerçeklendiğini görmek için basitçe $x = t_i$ ve $x = t_{i+1}$ almak yeterlidir. $z_0, z_1, \ldots, z_n$ değerleri belirlendikten sonra, artık $[t_0, t_n]$ aralığındaki herhangi bir x için $S(x)$ in hesaplanmasında Denklem (2) ve (7) kullanılabilir.

$z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ i belirlemek için, S' nün süreklilik koşullarını kullanacağız. İçteki t_i düğümlerinde $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ olmak zorundadır. Denklem (7) de türev alarak $S'_i(x)$ i elde ederiz. Daha sonra $x = t_i$ yazıp, sadeleştirme yaparsak

$$S'_i(t_i) = -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \tag{8}$$

buluruz. Benzer şekilde, S'_{i-1} i elde etmek için Denklem (7) yi kullanırsak,

$$S'_{i-1}(t_i) = \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}z_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}} \tag{9}$$

elde ederiz.

Denklem (8) ve (9) un sol tarafı birbirlerine eşitlendiğinde, sonuç

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \tag{10}$$

şekinde yazılabilir. Böylece, bu denklem $n+1$ bilinmeyen $z_0, z_1, ..., z_n$ için $n-1$ denklemli bir lineer sistemdir. $z_1, ..., z_{n-1}$ i elde etmek için, z_0 ve z_n i keyfi seçip, sistemin geri kalan denklemlerini çözebiliriz.
Bir mükemmel seçim $z_0 = z_n = 0$ almaktır. Bu durumda oluşan bağlayıcıya **doğal kübik bağlayıcı** denir.

$1 \leq i \leq n-1$ için $z_0 = 0$ ve $z_n = 0$ ile birlikte (10) lineer denklem sistemi simetrik, üçköşegensel ve köşegensel baskın olup,

$$\begin{aligned} h_i &= t_{i+1} - t_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) \\ b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\ v_i &= (b_i - b_{i-1}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

formundadır.

Bu sistem ölçekli satır pivotsuz Gauss elemesi ile aşağıdaki gibi çözülebilir:

girdi $n, (t_i), (y_i)$
$i = 0$ dan $n-1$ e döngü
    $h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$
    $b_i \leftarrow 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$
döngü sonu
$u_1 \leftarrow 2(h_0 + h_1)$
$v_1 \leftarrow b_1 - b_0$
$i = 2$ den $n-1$ e döngü
    $u_i \leftarrow 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}$
    $v_i \leftarrow b_i - b_{i-1} - h_{i-1}v_{i-1}/u_{i-1}$
döngü sonu
$z_n \leftarrow 0$
$i = n-1$ den 1 e -1 adımlı döngü
    $z_i \leftarrow (v_i - h_i z_{i+1})/u_i$
döngü sonu
$z_0 \leftarrow 0$
çıktı (z_i)

Şimdi, doğal kübik bağlayıcının *olası en düzgün* interpolasyon fonksiyonunu ürettiğini gösteren bir teorem sunalım.

Teorem (Doğal Kübik Bağlayıcının Optimalliği)

$[a, b]$ aralığında f'' sürekli ve $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ olsun. Eğer S, f yi $0 \leq i \leq n$ için t_i düğümlerinde interpole eden doğal kübik bağlayıcı ise, bu durumda

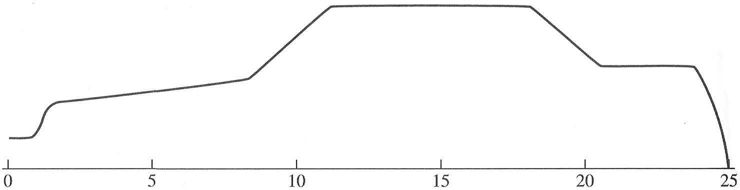
$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

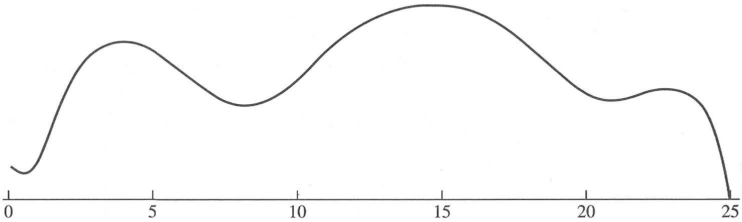
dir.

Germe Bağlayıcıları

Bazı veri-çakıştırma problemlerinde, **gergi** olarak adlandırılan bir τ parametresine sahip olmak kullanışlıdır. τ ya **büyük** bir değer atandığı zaman, veri noktalarından geçen eğri yüksek gerilime sahip olacaktır. Bu, eğriyi veri noktalarından sıkıca geren bir kuvvet olarak yorumlanabilir.

τ ya **küçük** bir değer atandığı zaman, eğri gittikçe kübik bağlayıcı interpolasyonunun şekline benzeyecektir. $\tau \to +\infty$ için, eğri parçalı lineer fonksiyona; yani, 1. dereceden bağlayıcıya yaklaşacaktır.


0
5
10
15
20
25


0
5
10
15
20
25

Yukarıdaki açıklananlara benzer bir eğrinin bir matematiksel modeli şu şekildedir: Önce olduğu gibi

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

düğümlerine ve herbir t_i de y_i verilerine sahibiz. Aradığımız **germe bağlayıcısı** aşağıdaki özelliklere sahip bir f fonksiyonudur:

1. $f \in C^2[t_0, t_n]$ dir.
2. $f(t_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n)$ interpolasyon koşulları sağlanır.
3. Her bir (t_{i-1}, t_i) açık aralığında f, $f^{(4)} - \tau^2 f'' = 0$ denklemini sağlar.

f nin sağlaması gereken koşullar:

$$f^{(4)} - \tau^2 f'' = 0$$
$$f(t_i) = y_i \qquad f(t_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$f''(t_i) = z_i \qquad f''(t_{i+1}) = z_{i+1}$$

olup, bu **iki-nokta sınır-değer probleminin** çözümünün

$$\begin{aligned} f(x) &= \{z_i \sinh[\tau(t_{i+1}-x)] + z_{i+1}\sinh[\tau(x-t_i)]\} \,/\, [\tau^2 \sinh(\tau h_i)] \\ &\quad + (y_i - z_i/\tau^2)(t_{i+1}-x)/h_i + (y_{i+1} - z_{i+1}/\tau^2)(x-t_i)/h_i \end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir.

z_i ler

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1/h_i - \tau/\sinh(\tau h_i) \\ \beta_i &= \tau\cosh(\tau h_i)/\sinh(\tau h_i) - 1/h_i \\ \gamma_i &= \tau^2(y_{i+1} - y_i)/h_i \end{aligned}$$

ve $z_1 = z_n = 0$ olmak üzere

$$\alpha_{i-1}z_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i)z_i + \alpha_i z_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

sisteminden belirlenecektir.