NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Bağlayıcı Fonksiyonlar ve En Küçük Kareler

En Küçük Kareler Yöntemi

En İyi Doğru

m tane (x_i, y_i) verisinden oluşan

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

tablosu verilmiş olsun. Bu verilerin bir lineere yakın davranış gösterdiğini varsayarsak; verilere en yakın geçen bir $y = ax + b$ doğrusunu nasıl buluruz?
Bunun anlamı

$$\sum_{k=1}^{m} |ax_k + b - y_k|$$

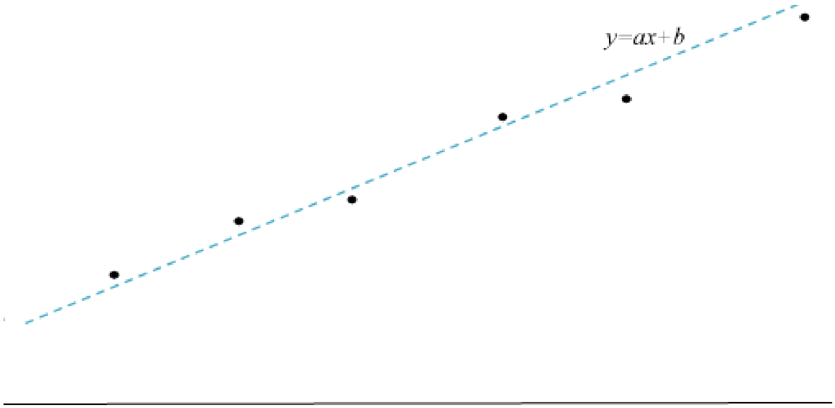
toplam hatası minimum olacak şekilde a ve b değerlerini bulmalıyız ki bu problem bir ℓ_1-**yaklaşımı** olarak adlandırılır.

Pratikte, istatistiksel bakış açısından daha uygun olan

$$\phi(a,b)=\sum_{k=1}^{m}\left(ax_k+b-y_k\right)^2$$

fonksiyonunu minimumlaştırmak daha yaygındır, çünkü eğer hatalar bir *normal olasılık dağılımına* sahipseler, bu durumda ϕ nin minimumlaştırılması a ve b için bir en iyi tahmin üretir. Bu bir ℓ_2-**yaklaşımı** olarak adlandırılır.
$\phi(a,b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini $\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial a}=0$ ve $\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}=0$ eşitliklerinden bulabiliriz.

$$\begin{cases}\phi_a=2\sum_{k=1}^{m}\left(ax_k+b-y_k\right)x_k=0\\ \phi_b=2\sum_{k=1}^{m}\left(ax_k+b-y_k\right)=0\end{cases}$$


y=ax+b

Sistem düzenlenirse

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right) a + \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) b = \sum_{k=1}^{m} y_k x_k \\ \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) a + mb = \sum_{k=1}^{m} y_k \end{cases}$$

normal denklemleri elde edilir ki; $d = m\sum_{k=1}^{m} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2$ olmak üzere, buradan

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{d}\left(m\sum_{k=1}^{m} x_k y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{k=1}^{m} y_k\right) \\ b &= \frac{1}{d}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \sum_{k=1}^{m} y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek

x	1	2	2.5	3
y	3.7	4.1	4.3	5

tablosunu en iyi temsil eden doğruyu bulunuz.

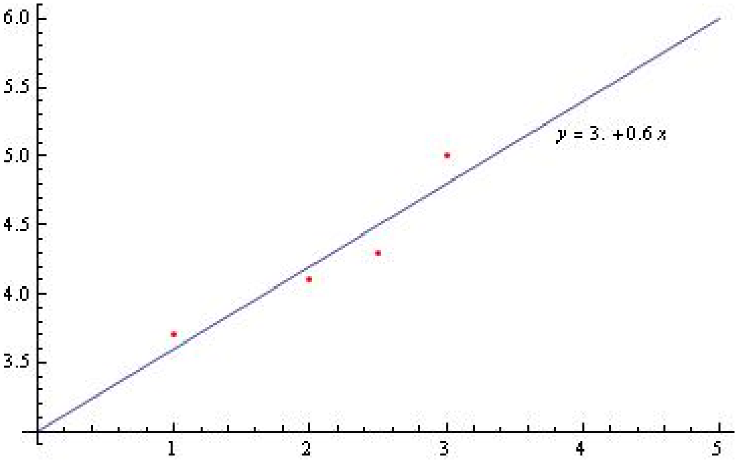
Çözüm

Normal denklemler

$$\begin{cases} 20.25a + 8.5b = 37.65 \\ 8.5a + 4b = 17.10 \end{cases}$$

olup çözümü: $a = 0.6$ *ve* $b = 3.0$, $\phi = 0.1$ ($= 0$ *ise noktalar doğru üzerinde olurdu.*)

$$y = 0.6x + 3$$


y = 3. +0.6 x
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
1
2
3
4
5

En Küçük Kareler Yöntemi

En İyi Polinom

Verilere en yakın geçen bir $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$ polinomu bulmak istersek

$$\phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j x_k^j - y_k \right)^2$$

fonksiyonunu minimum yapan c_i değerleri için

$$\phi_{c_i} = \sum_{k=1}^{m} 2 \left(\sum_{j=0}^{n} c_j x_k^j - y_k \right) x_k^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

den

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^{j+i} \right) c_j = \sum_{k=1}^{m} y_k x_k^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

normal denklemleri elde edilir.

Açık formda

$$
\left\{
\begin{array}{rcccl}
mc_0 + \left(\sum_{k=1}^m x_k\right) c_1 + & \cdots & + \left(\sum_{k=1}^m x_k^n\right) c_n & = & \sum_{k=1}^m y_k \\
\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) c_0 + \left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right) c_1 + & \cdots & + \left(\sum_{k=1}^m x_k^{n+1}\right) c_n & = & \sum_{k=1}^m y_k x_k \\
\left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right) c_0 + \left(\sum_{k=1}^m x_k^3\right) c_1 + & \cdots & + \left(\sum_{k=1}^m x_k^{n+2}\right) c_n & = & \sum_{k=1}^m y_k x_k^2 \\
 & \vdots & & & \\
\left(\sum_{k=1}^m x_k^n\right) c_0 + \left(\sum_{k=1}^m x_k^{n+1}\right) c_1 + & \cdots & + \left(\sum_{k=1}^m x_k^{2n}\right) c_n & = & \sum_{k=1}^m y_k x_k^n
\end{array}
\right.
$$

dır. Bu sistemin çözümünden c_j katsayıları elde edilir.

Örnek

x	1	2	2.5	3
y	3.7	4.1	4.3	5

tablosunu en iyi temsil eden kuadratik polinomu bulunuz.

Çözüm

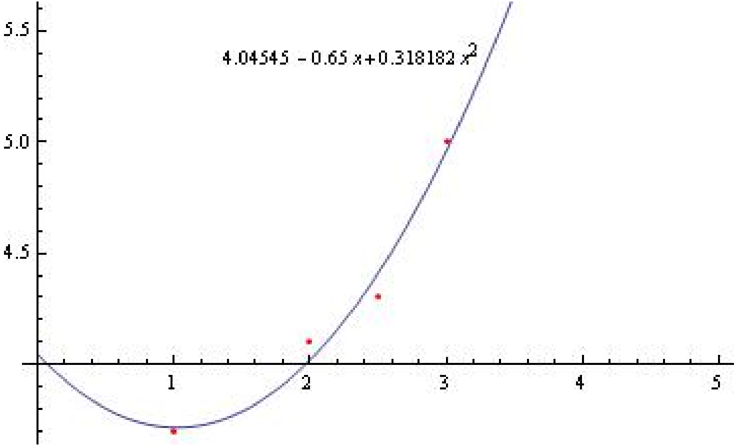
Normal denklemlerden

$$\begin{cases} 4c_0 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right) c_1 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2\right) c_2 & = \sum_{k=1}^{4} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right) c_0 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2\right) c_1 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^3\right) c_2 & = \sum_{k=1}^{4} y_k x_k \\ \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2\right) c_0 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^3\right) c_1 + \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^4\right) c_2 & = \sum_{k=1}^{4} y_k x_k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c_0 + 8.5c_1 + 20.25c_2 & = 17.1 \\ 8.5c_0 + 20.25c_1 + 51.63c_2 & = 37.65 \\ 20.25c_0 + 51.63c_1 + 137.06c_2 & = 91.98 \end{cases}$$

olup çözümü: $c_0 = 4.046$, $c_1 = -0.65$ *ve* $c_2 = 0.318$

$$y = 4.046 - 0.65x + 0.318x^2$$


4.04545 - 0.65 x+0.318182 x^2
5.5
5.0
4.5
1
2
3
4
5

En Küçük Kareler Yöntemi

Polinom olmayan durum

$\{g_i(x)\}$ bir baz fonksiyonlar kümesi olmak üzere; verilere en yakın geçen bir $y = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_n g_n(x)$ tipinde fonksiyon bulmak istersek

$$\phi(c_1, c_2, ..., c_n) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_k) - y_k \right)^2$$

fonksiyonunu minimum yapan c_i değerleri için

$$\phi_{c_i} = \sum_{k=1}^{m} 2 \left(\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_k) - y_k \right) g_i(x_k) = 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

den

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) \right) c_j = \sum_{k=1}^{m} y_k g_i(x_k) \qquad (i = 1, ..., n)$$

normal denklemleri elde edilir.

Açık formda

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_1(x_k)\right] c_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)\right] c_n = \sum_{k=1}^{m} y_k g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_2(x_k)\right] c_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_2(x_k)\right] c_n = \sum_{k=1}^{m} y_k g_2(x_k) \\ \vdots \\ \left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_n(x_k)\right] c_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_n(x_k)\right] c_n = \sum_{k=1}^{m} y_k g_n(x_k) \end{cases}$$

den c_j ler bulunur.

Örnek

x	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1

tablosunu en iyi temsil eden $y = c_1 \ln x + c_2 \cos x + c_3 e^x$ formunda fonksiyonu bulunuz.

Çözüm

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{10} \ln^2 x_k\right] c_1 + \left[\sum_{k=1}^{10} \cos x_k \ln x_k\right] c_2 + \left[\sum_{k=1}^{10} e^{x_k} \ln x_k\right] c_3 = \sum_{k=1}^{10} y_k \mathrm{l} \\ \left[\sum_{k=1}^{10} \ln x_k \cos x_k\right] c_1 + \left[\sum_{k=1}^{10} \cos^2 x_k\right] c_2 + \left[\sum_{k=1}^{10} e^{x_k} \cos x_k\right] c_3 = \sum_{k=1}^{10} y \\ \left[\sum_{k=1}^{10} \ln x_k \; e^{x_k}\right] c_1 + \left[\sum_{k=1}^{10} \cos x_k e^{x_k}\right] c_2 + \left[\sum_{k=1}^{10} e^{2x_k}\right] c_3 = \sum_{k=1}^{10} y_k e^{x_k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6.79410c_1 - 5.34749c_2 + 63.25889c_3 = 1.61627 \\ -5.34749c_1 + 5.10842c_2 - 49.00859c_3 = -2.38271 \\ 63.25889c_1 + -49.00859c_2 + 1002.50650c_3 = 26.77277 \end{cases}$$

olup çözümü: $c_1 = -1.04103$, $c_2 = -1.26132$ *ve* $c_3 = 0.03073$

$$y = -1.04103 \ln x - 1.26132 \cos x + 0.03073 e^{x}$$