NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Runge-Kutta Yöntemleri

Önceki bölümde verilen Taylor serisi yöntemi, program öncesinde bazı analizler yapma zorlamasına sahiptir. Bu nedenle, örneğin

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

genel problemini 4. basamaktan Taylor serisi yöntemi ile çözmek istesek; (1) de ardışık türev alarak, x'', x''' ve $x^{(4)}$ formüllerini belirlemek ve daha sonra da bu fonksiyonları programlamak zorundayız.

Runge-Kutta yöntemleri, her ne kadar $f(t,x)$ değerlerinin zekice bir kombinasyonu anlamında Taylor serisi yöntemini taklit etseler de, bu zorluğu ortadan kaldırırlar. Şimdi, ikinci basamaktan Runge-Kutta yordamını oluşturarak bunu gösterelim.

İkinci Basamaktan Runge-Kutta Yöntemi

$x(t+h)$ nın Taylor serisi ile başlayalım:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \frac{h^3}{3!}x'''(t) + \cdots \tag{2}$$

Diferensiyel denklemden;

$$\begin{aligned} x'(t) &= f \\ x''(t) &= f_t + f_x x' = f_t + f_x f \\ x'''(t) &= f_{tt} + f_{tx} f + (f_t + f_x f) f_x + f(f_{xt} + f_{xx} f) \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Burada, alt indisler kısmi türevleri göstermektedir. Şimdi, Denklem (2) deki ilk üç terim

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hf + \tfrac{1}{2}h^2(f_t + ff_x) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= x + \tfrac{1}{2}hf + \tfrac{1}{2}h[f + hf_t + hff_x] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{3}$$

formunda yazılabilir. Burada x in anlamı $x(t)$, f nin anlamı $f(t, x(t))$ v.s.

İki değişkenli Taylor serisindeki bir kaç terim yardımı ile kısmi türevleri eleyebiliriz:

$$f(t+h, x+hf) = f + hf_t + hff_x + \mathcal{O}(h^2)$$

Denklem (3)

$$x(t+h) = x + \tfrac{1}{2}hf + \tfrac{1}{2}hf(t+h, x+hf) + \mathcal{O}(h^3)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, çözüme yaklaşım formülü

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}f(t,x) + \frac{h}{2}f(t+h, x+hf(t,x))$$

veya denk olarak

$$x(t+h) = x(t) + \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2) \tag{4}$$

olup, burada

$$\begin{cases} F_1 = hf(t,x) \\ F_2 = hf(t+h, x+F_1) \end{cases}$$

dir. Bu formül, çözüme yaklaşmak için her defasında bir adım ile ardışık olarak kullanılabilir, ve **ikinci basamaktan Runge-Kutta yöntemi** olarak adlandırılır. **Heun yöntemi** olarak da bilinir.

Genel olarak ikinci basamaktan Runge-Kutta formülü

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 hf(t + \alpha h, x + \beta hf) + \mathcal{O}(h^3) \tag{5}$$

formunda olup, burada w_1, w_2, α ve β belirlenecek parametrelerdir. Denklem (5), iki değişkenli Taylor serisi yardımı ile

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 h[f + \alpha hf_t + \beta hff_x] + \mathcal{O}(h^3) \tag{6}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Denklem (3) ve (6) yı karşılaştırırsak

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2\alpha = \frac{1}{2} \\ w_2\beta = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

koşullarını yükleyeceğimizi görürüz.

Bu sistemin çözümlerinden biri $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1$ olup, Denklem (4) deki Heun yöntemine karşılık gelir. (7) sisteminin başka çözümleri de vardır. Örneğin $w_1 = 0$ alındığında; $w_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ve böylece (5) ten karşılık gelen formül,

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1\right) \end{cases}$$

olmak üzere, **geliştirilmiş Euler yöntemi** olarak adlandırılan

$$x(t+h) = x(t) + F_2$$

dir. (Bu yöntemi standart Euler yöntemi ile karşılaştırınız.)

Dördüncü Basamaktan Runge-Kutta Yöntemi

Yüksek basamaktan Runge-Kutta formüllerini elde etmek oldukça sıkıcı olduğundan bunu yapmayacağız. Fakat formüller oldukça şıktırlar ve bir kez elde edildikten sonra kolayca programlanabilirler. *Klasik* **dördüncü basamaktan Runge-Kutta yöntemi** aşağıdadır:

$$x(t+h) = x(t) + \tfrac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) \tag{8}$$

Burada,

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2) \\ F_4 = hf(t + h, x + F_3) \end{cases}$$

Bu yöntemin dördüncü basamak olarak adlandırılmasının nedeni, Taylor serisinden h^4 e kadar olan terimlerin kullanılmasındandır. Böylece hata $\mathcal{O}(h^5)$ dir.

Çoklu-Adım Yöntemleri

Başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılan Taylor serisi yöntemi veya Runge-Kutta yöntemi **tek-adım yöntemleridir**, çünkü çözüm t den $t+h$ ya geçerken, $x(t)$ nin her hangi önceki değerlerinin bilgisini kullanmazlar. Eğer, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i$, t-ekseni boyuncaki değerler ise, bu durumda x_{i+1} ($x(t_{i+1})$ in yaklaşık değeri) sadece x_i ye bağlıdır ve $x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_0$ yaklaşık değerlerinin bilgisi *kullanılmaz*.

Eğer herbir adımda çözümün bazı önceki değerleri gözönüne alınırsa, daha etkili yordamlar oluşturulabilir. Burada göz önüne alınan prensip şöyledir: Başlangıç-değer probleminin yaklaşık çözümünü elde edelim. t-ekseni üzerinde $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ adımlarını oluşturalım. (Bunlar eşit aralıklı olmak zorunda değildir.) Eğer $x'(t) = f(t, x(t))$ nin gerçek çözümü $x(t)$ ile gösterilirse, bu durumda denklemde integral alarak

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = x(t_{n+1}) - x(t_n) \tag{1}$$

ve buradan

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \tag{2}$$

elde ederiz. Sağ taraftaki integrale bir sayısal tümleme yöntemiyle yaklaşılabilir ki; sonuç yaklaşık çözümü adım-adım oluşturmak için bir formül olacaktır.

Adams-Bashforth Formülü

f_i, $f(t_i, x_i)$ yi belirtmek üzere, kabul edelim ki ortaya çıkan formül,

$$x_{n+1} = x_n + af_n + bf_{n-1} + cf_{n-2} + \cdots \tag{3}$$

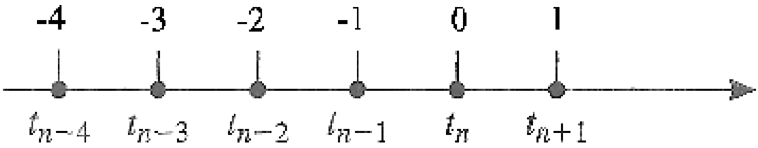
tipindedir. Bu tipten bir eşitlik **Adams-Bashforth formülü** olarak adlandırılır. Örneğin, eşit aralıklı $t_i = t_0 + ih$, $(0 \leq i \leq n)$ noktalarını baz alan **5. basamaktan Adams-Bashforth formülü**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{720}\left[1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}\right] \tag{4}$$

dür. Bu katsayılar nasıl belirlenmiştir? Denklem (2) deki integrale

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \approx h\left[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2} + Df_{n-3} + Ef_{n-4}\right] \tag{5}$$

şeklinde yaklaşmaya çalışmakla başlayalım. Denklem (5), derecesi ≤ 4 olan tüm polinomlar için kesin doğru olacak şekilde A, B, C, D ve E katsayılarını belirleyelim. Şekilde çizildiği gibi, $t_n = 0$ ve $h = 1$ kabul etmek genelliği bozmaz (Problem **8.3.6** (s. 547))



5. *basamaktan Adam – Bashfort* (4) *formülünde kullanılan noktalar*

Π_4 için aşağıdaki beş polinomu baz olarak alalım:

$$
\begin{aligned}
p_0(t) &= 1 \\
p_1(t) &= t \\
p_2(t) &= t(t+1) \\
p_3(t) &= t(t+1)(t+2) \\
p_4(t) &= t(t+1)(t+2)(t+3)
\end{aligned}
$$

Bu polinomlar denklemde yazıldığında

$$\int_0^1 p_n(t)dt = Ap_n(0) + Bp_n(-1) + Cp_n(-2) + Dp_n(-3) + Ep_n(-4)$$

olup, A, B, C, D ve E katsayılarını belirlemek için beş denklem elde ederiz. Bunlar

$$\left\{\begin{aligned} A+B+C+D+E &= 1 \\ -B-2C-3D-4E &= 1/2 \\ 2C+6D+12E &= 5/6 \\ -6D-24E &= 9/4 \\ 24E &= 251/30 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

sistemini verir ki bu geri yerleştirme ile çözülürse, (4) formülünün katsayıları elde edilir. Bu yordam **belirsiz katsayılar yöntemi** olarak adlandırılır. Prensip olarak, bu yöntem yüksek basamaktan benzer formüller elde etmek için ve diğer birçok durumda kullanılabilir. (Kesim 7.2, s. 482 ye bakınız.)

Adams-Moulton Formülü

Nümerik pratikte, Adams-Bashforth formülleri kendi başlarına çok nadir olarak kullanılmakta olup, duyarlılığı artırmak için, diğer formüllerle birlikte kullanılırlar. Bunun nasıl mümkün olabileceğini görmek için, Denklem (2) ye geri dönelim ve kabul edelim ki f_{n+1} i içeren bir nümerik tümleme formülü kullanıyoruz. Bu durumda, Denklem (3)

$$x_{n+1} = x_n + af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} + \cdots \tag{7}$$

formunu alır. Bu tipten bir formül, **5. basamaktan Adams-Moulton formülü** olarak bilinen

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{720}\left[251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}\right] \tag{8}$$

formülüdür. Bu formül de belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak türetilebilir. Dikkat edilirse, formül çözümü elde etmek için doğrudan kullanılamaz, çünkü x_{n+1} denklemin her iki tarafında da bulunmaktadır! Hatırlarsak, f_i, $f(t_i, x_i)$ ye karşılık gelmektedir ve bu nedenle f_{n+1} terimi ancak x_{n+1} bilindikten sonra hesaplanabilir. Fakat, **kestirici düzeltici**