# NÜMERİK ANALİZ

## Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

# Sistemler ve Yüksek Basamaktan Denklemler

Birinci basamaktan bir diferensiyel denklem sisteminin standart formu

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \quad \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{1}$$

dir. Bu sistemde, $x_1, x_2, ..., x_n$ belirlenecek olan $n$ tane bilinmeyen fonksiyondur. Bunlar tek bağımsız değişken $t$ nin fonksiyonlarıdır ve $x_i'$ notasyonu $dx_i/dt$ türevini göstermektedir.
Sistem (1),

$$X' = F(t, X)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $X = (x_1, ..., x_n)^T$ $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ dir.

Yüksek basamaktan bir diferensiyel denklem birinci basamaktan bir denklem sistemine dönüştürülebilir. Kabul edelim ki bir diferensiyel denklem

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

formunda verilsin. Burada, kuşkusuz, türevler $t$ ye göredir, yani $y^{(i)} = d^i y / dt^i$ dir. Buna göre yeni

$$x_1 = y \qquad x_2 = y' \qquad x_3 = y'' \qquad \cdots \qquad x_n = y^{(n-1)}$$

değişkenlerini tanımlayalım. Bu yeni değişkenler, birinci basamaktan

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{cases}$$

denklem sistemini sağlar. Bu, (1) ile verilen formda bir sistemdir.

## Örnek

$$\begin{cases} (\sin t)y''' + \cos(ty) + \sin(t^2 + y'') + (y')^3 = \log t \\ y(2) = 7 \\ y'(2) = 3 \\ y''(2) = -4 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini, başlangıç değerleriyle birlikte, birinci basamaktan bir sisteme dönüştürünüz.

## Çözüm

*Yeni değişkenler* $x_1, x_2$ *ve* $x_3$ *ü şu şekilde alalım:* $x_1 = y$, $x_2 = y'$ *ve* $x_3 = y''$. *Böylece,* $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ *yi yöneten sistem*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \left[\log t - x_2^3 - \sin(t^2 + x_3) - \cos(tx_1)\right] / \sin t \end{cases}$$

*olup,* $t = 2$ *deki başlangıç koşulları* $X(2) = (7, 3, -4)^T$ *dir.*

## Örnek

$$\begin{cases} (x'')^2 + te^y + y' &= x' - x \\ y'y'' - \cos(xy) + \sin(tx'y) &= x \end{cases}$$

sistemini birinci basamaktan bir sisteme dönüştürünüz. Bu örnekte başlangıç koşulunu ihmal ediyoruz.

## Çözüm

*Yeni değişkenler* $x_1 = x$, $x_2 = x'$ *ve* $x_3 = y$, $x_4 = y'$ *alındığında, sistem*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = (x_2 - x_1 - x_4 - te^{x_3})^{1/2} \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = [x_1 - \sin(tx_2x_3) + \cos(x_1x_3)] \,/ x_4 \end{cases}$$

*şekline dönüşür.*

Teorik bakış açısından, Sistem (1) deki denklemlerin $t$ yi açık olarak içermemesi genelliği bozmaz. Yani, yeni bir $x_0 = t$ değişkeni tanımlayarak, sistemi

$$x_i' = f(x_0, x_1, ..., x_n) \tag{2}$$

formunda yazabiliriz. Bu yeni değişken için diferensiyel denklem, basitçe $x_0' = 1$ olur. Bu parçayla birlikte (2) denklem sistemini, $t$ nin açık olarak görünmediği

$$X' = F(X)$$

formunda yazabiliriz. Burada, $X = (x_0, x_1, ..., x_n)^T$ dur. Bu tip bir sisteme **otonom** denir.

## Örnek

$$\begin{cases} (\sin t)y''' + \cos(ty) + \sin(t^2 + y'') + (y')^3 = \log t \\ y(2) = 7 \\ y'(2) = 3 \\ y''(2) = -4 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini, başlangıç değerleriyle birlikte, birinci basamaktan bir sisteme dönüştürünüz.

## Çözüm

$x_0 = t$, $x_1 = y$, $x_2 = y'$ *ve* $x_3 = y''$ *alalım. Böylece, yeni sistem*

$$\begin{cases} x_0' = 1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \left[\log x_0 - x_2^3 - \sin(x_0^2 + x_3) - \cos(x_0 x_1)\right] / \sin x_0 \end{cases}$$

*ve başlangıç koşulu* $X = (2, 7, 3, -4)^T$ *olur.*

# Sistemler İçin Yöntemler

**Taylor-serisi yöntemi**, birinci basamaktan sistemlere de uygulanabilir. Her bir değişken için kesilmiş Taylor serisini

$$x_i(t+h) = x_i(t) + hx_i'(t) + \frac{h^2}{2!}x_i''(t) + \frac{h^3}{3!}x_i'''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x_i^{(n)}(t)$$

şeklinde, veya vektör formunda

$$X(t+h) = X(t) + hX'(t) + \frac{h^2}{2!}X''(t) + \frac{h^3}{3!}X'''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}X^{(n)}(t)$$

şeklinde yazalım. Burada görünen türevler diferensiyel denklemden elde edilebilir. Genellikle, bir bilgisayar programında kullanılırken, bu türevler belli bir sırada hesaplanmalıdır. Bir adımda gereksinim duyduğumuz bir değerin bir önceki adımda hesaplanmış olmasından emin olmalıyız.

## Örnek

Aşağıdaki başlangıç-değer problemi için 3. basamaktan bir Taylor-serisi algoritması yazınız. $|h| = 0.1$ kullanınız ve çözümü $-2 \leq t \leq 1$ aralığında hesaplayınız.

$$\begin{cases} x' = x + y^2 - t^3 & x(1) = 3 \\ y' = y + x^3 + \cos t & y(1) = 1 \end{cases}$$

**girdi** $t \leftarrow 1;\ x \leftarrow 3; y \leftarrow 1; h \leftarrow -0.1; M \leftarrow 30;$

$k = 1$ **den** $M$ **ye döngü**

$x' \leftarrow x + y^2 - t^3;\ \ y' \leftarrow y + x^3 + \cos t;$

$x'' \leftarrow x' + 2yy' - 3t^2;\ y'' \leftarrow y' + 3x^2x' - \sin t$

$x''' \leftarrow x'' + 2yy'' + 2(y')^2 - 6t;\ \ y''' \leftarrow y'' + 6x(x')^2 + 3x^2x'' - \cos t$

$x \leftarrow x + h(x' + \frac{1}{2}h(x'' + \frac{1}{3}h(x''')));$

$y \leftarrow y + h(y' + \frac{1}{2}h(y'' + \frac{1}{3}h(y''')))$

$t \leftarrow t + h$

**çıktı** $k, t, x, y$

**döngü sonu**

**4. basamaktan Runge-Kutta formülü**, vektör formunda

$$X(t+h) = X(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

dür. Burada

$$\begin{aligned} F_1 &= hF(X) \\ F_2 &= hF(X + \tfrac{1}{2}F_1) \\ F_3 &= hF(X + \tfrac{1}{2}F_2) \\ F_4 &= hF(X + F_3) \end{aligned}$$

dür.

**Adams-Bashforth-Moulton kestirici-düzeltici yöntemi**:

$$
\begin{aligned}
X^*(t+h) &= X(t) + \frac{h}{720}[1901F(X(t))\text{-}2774F(X(t-h)) \\
&\quad +2616F(X(t-2h))\text{-}1274F(X(t-3h))+251F(X(t-4h))] \\
X(t+h) &= X(t) + \frac{h}{720}[251F(X^*(t+h)) + 646F(X(t)) \\
&\quad -264F(X(t-h)) + 106F(X(t-2h)) - 19F(X(t-3h))].
\end{aligned}
$$

Tek denklem durumunda olduğu gibi, bir tek-adım yordamı, örneğin 5. basamaktan Runge-Kutta yöntemi

$$X(t_0+h) \qquad X(t_0+2h) \qquad X(t_0+3h) \qquad X(t_0+4h)$$

başlangıç değerlerini sağlamak için kullanılabilir.