NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Sınır-Değer Problemleri; Atış Yöntemi

İnceleyeceğimiz iki-nokta sınır-değer problemi

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

dır. Bu problemi ele almanın doğal bir yolu, buna ilişkin başlangıç-değer problemini uygun bir *tahmini* $x'(a)$ başlangıç değeri ile çözmektir. Buradan, $x(b) = \beta$ olacağını umarak, yaklaşık bir çözüm elde etmek için denklemi integralleyebiliriz. Eğer $x(b) \neq \beta$ ise, bu durumda $x'(a)$ tahminimizi yenileyerek tekrar deneyebiliriz. Bu sürece **atış** denir ve bu atışı (tahmini) yapmanın sistematik yolları vardır.

$x'(a)$ tahmini değerini z ile gösterelim. Böylece karşılık gelen başlangıç-değer problemi

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \quad x'(a) = z \end{cases} \tag{2}$$

dir. Bu başlangıç-değer probleminin çözümü x_z ile gösterilecek. Hedef $x_z(b) = \beta$ olacak şekilde z yi seçmektir.

$$\phi(z) \equiv x_z(b) - \beta$$

alırsak, hedefimiz basitçe $\phi(z) = 0$ denklemini z ye göre çözmek olur. Bunun için, fonksiyonel iterasyonun yanısıra; yarılama, kiriş ve Newton yöntemlerinin hepsi uygundur. ϕ hesaplanması *pahalı* bir fonkiyondur, çünkü $\phi(z)$ nin her değeri bir başlangıç-değer probleminin nümerik çözümü sonucunda elde edilir.

Kiriş Yöntemi

Bir $\phi(z) = 0$ denklemini çözmek için kiriş yöntemi

$$\phi(z) - \phi(z_2) = \left(\frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right) (z - z_2)$$

idi. Eğer, $\phi(z_3) = 0$ olacak şekilde bir z_3 seçersek

$$z_3 = z_2 - \left(\frac{z_2 - z_1}{\phi(z_2) - \phi(z_1)} \right) \phi(z_2)$$

elde ederiz. Bu yordam,

$$z_n = z_{n-1} - \left(\frac{z_{n-1} - z_{n-2}}{\phi(z_{n-1}) - \phi(z_{n-2})} \right) \phi(z_{n-1}) \qquad (3)$$

iterasyonu ile bir $z_1, z_2, ..., z_n$ dizisi elde etmek için tekrarlanabilir. Böylece $\phi(z_n) < \varepsilon$ olacak şekilde z_n bulunduğunda (2) nin x_{z_n} çözümü (1) probleminin de çözümü olur.

Sınır-Değer Problemleri; Sonlu Farklar

İki-nokta sınır-değer problemine bir başka yaklaşım, t-aralığının bir başlangıç ayrıklaştırılmasını ve akabinde türevler için yaklaşım formüllerinin kullanılmasını içerir. Şu iki formül özellikle kullanışlıdır:

$$x'(t) = (2h)^{-1}[x(t+h) - x(t-h)] - \tfrac{1}{6}h^2 x'''(\xi) \tag{1}$$

$$x''(t) = (h)^{-2}[x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)] - \tfrac{1}{12}h^2 x^{(4)}(\tau) \tag{2}$$

Çözeceğimiz problemin

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \quad\quad x(b) = \beta \end{cases} \tag{3}$$

olduğunu varsayalım. $[a, b]$ aralığı $a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} = b$ noktalarıyla parçalansın. Bu parçalanma eşit aralıklı olmak zorunda değildir, fakat pratikte genellikle eşit alınır.

Basitlik için

$$t_i = a + ih \qquad 0 \le i \le n+1 \qquad h = (b-a)/(n+1) \tag{4}$$

kabul ediyoruz. $x(t_i)$ nin yaklaşık değeri y_i ile gösterilsin. Bu durumda (3) ün ayrık (diskret) versiyonu

$$\left\{ \begin{array}{rl} y_0 & = \alpha \\ h^{-2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) & = f(t_i, y_i, (2h)^{-1}(y_{i+1} - y_{i-1})) \qquad (1 \le i \le n) \\ y_{n+1} & = \beta \end{array} \right. \tag{5}$$

olur. f lineer değilse çözmek zor!

Fakat, eğer f nin x ve x' ne göre lineer olduğunu kabul edersek, bu durumda f

$$f(t,x,x') = u(t) + v(t)x + w(t)x' \tag{6}$$

formunda olur. Böylece, Sistem (5)

$$\left\{ \begin{array}{rl} y_0 & = \alpha \\ (-1 - \frac{1}{2}hw_i)y_{i-1} + (2 + h^2 v_i)y_i + (-1 + \frac{1}{2}hw_i)y_{i+1} & = -h^2 u_i \ (1 \leq i \leq \\ y_{n+1} & = \beta \end{array} \right. \tag{7}$$

formunda bir lineer denklem sistemi olup kolayca çözülür. Burada, $u_i = u(t_i)$, $v_i = v(t_i)$ v.s. yazdık.

Teorem (Sınır-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği)

$[a, b]$ *aralığında*

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ c_{11}x(a) + c_{12}x'(a) = c_{13} \\ c_{21}x(b) + c_{22}x'(b) = c_{23} \end{cases}$$

sınır-değer problemi tek bir çözüme sahiptir, eğer;

1. f *ve kısmi türevleri* f_t, f_x *ve* $f_{x'}$, $D = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *bölgesinde sürekli ise*

2. D *de,* $f_x > 0$, $|f_x| \leq M$ *ve* $|f_{x'}| \leq M$ *ise*

3. $|c_{11}| + |c_{12}| > 0$, $|c_{21}| + |c_{22}| > 0$, $|c_{11}| + |c_{21}| > 0$ *ve* $c_{11}c_{12} \leq 0 \leq c_{21}c_{22}$ *ise.*