*Basamak potansiyeli* $E<V\_{0}$



$x<0$ için,

$$ψ\_{1}\left(x\right)=Ae^{ik\_{1}x}+Be^{-ik\_{1}x} k\_{1}=\sqrt{\frac{2mE}{ℏ^{2}}}$$

$x>0$ için,

$$\frac{-ℏ^{2}}{2m}\frac{d^{2}ψ\_{2}}{dx^{2}}+V\_{0}ψ\_{2}=Eψ\_{2}$$

$$\frac{d^{2}ψ\_{2}}{dx^{2}}=\left[\frac{2m}{ℏ^{2}}(V\_{0}-E)\right]ψ\_{2}=k\_{2}^{2}ψ\_{2}$$

$$k\_{2}=\sqrt{\frac{2m}{ℏ^{2}}\left(V\_{0}-E\right)} E<V\_{0}$$

$$ψ\_{2}\left(x\right)=Ce^{k\_{2}x}+De^{-k\_{2}x}$$

$E>V(x)$ olduğu zaman dalga fonksiyonu harmonik,

$E<V(x)$ olduğu zaman dalga fonksiyonu üstel,

Dalga fonksiyonu bu özelliği, potansiyel $x$-bağlı olsa bile genellikle korunur.

$x\rightarrow \infty $ giderken dalga fonksiyonunun sonlu olabilmesi için $C=0$ olmalıdır.

$$ψ\_{2}\left(x\right)=De^{-k\_{2}x}$$

$ψ\_{2}\left(x\right)$, dalga fonksiyonunun formu bize, klasik olarak yasaklanan bölgeye parçacıkların sızabileceğini söylemektedir. Klasik olarak bütün parçacıklar, kinetik enerjileri negatif olmayacağı için $x=0$ noktasında geriye yansırlar. Diğer taraftan kuantum mekaniksel dalga paketi yasak bölgeye bir miktar sızabilmektedir.

$$A+B=D$$

$$ik\_{1}\left(A-B\right)=-k\_{2}D$$

$$B-D=-A$$

$$\left(-k\_{1}iB+k\_{2}D\right)=-k\_{1}iA$$

$$\left(\begin{matrix}1&-1\\-k\_{1}i&k\_{2}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}B\\D\end{matrix}\right)=-k\_{1}i\left(\begin{matrix}A\\A\end{matrix}\right)$$

$$B=A\left(\frac{ik\_{1}-k\_{2}}{ik\_{1}+k\_{2}}\right)^{-1}$$

$$D=A\frac{2k\_{1}i}{ik\_{1}-k\_{2}}$$

$$R=\frac{\left|B\right|^{2}}{\left|A\right|^{2}}=1$$

$$T=\frac{0}{\left|A\right|^{2}}=0$$

*Engel Potansiyeli* $E>V\_{0}$



$$V\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0, \&x<0\\V\_{0}, 0\leq x\leq a\\0, \&x>a\end{array}\right.$$

$$ψ\_{1}\left(x\right)=Ae^{ik\_{1}x}+Be^{-ik\_{1}x} x<0$$

$$ψ\_{2}\left(x\right)=Ce^{ik\_{2}x}+De^{-ik\_{2}x} 0\leq x\leq a$$

$$ψ\_{3}\left(x\right)=Fe^{ik\_{3}x}$$

$k\_{1}=k\_{3}=\sqrt{2mE/ℏ^{2}}$ $k\_{2}=\sqrt{2m(E-V\_{0})/ℏ^{2}}$

$$R=\frac{\left|F\right|^{2}}{\left|A\right|^{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{V\_{0}^{2}}{E(E-V\_{0})}sin^{2}k\_{2}a}$$

geçme katsayısı

*Engel Potansiyeli* $E<V\_{0}$



$$ψ\_{2}\left(x\right)=Ce^{k\_{2}x}+De^{-k\_{2}x} 0\leq x\leq a$$

$$k\_{2}=\sqrt{2m(V\_{0}-E)/ℏ^{2}}$$

$$T=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{V\_{0}^{2}}{E(V\_{0}-E)}sinh^{2}k\_{2}a}$$

*Kuyu Potansiyeli I.*



$$V\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0 0\leq x\leq a \\\infty x<0, x>a\end{array}\right.$$

Bu tür potansiyel parçacığın $0\leq x\leq a$ aralığına hapsedildiğini ve hiçbir şekilde bu aralığın dışına çıkamayacağını ifade eder. Dolayısıyla dalga fonksiyonu $ψ(x<0)$ ve $ψ(x>a)$ için sıfır olmalıdır.

S.D.’nin çözümü,

$$ψ\left(x\right)=Asinkx+Bcoskx$$

$$k^{2}=\frac{2mE}{ℏ^{2}}$$

$x=0$ ve $x=a$ ‘da dalga fonksiyonunun süreklilik şartı $ψ\left(x=0\right)= ψ\left(x=a\right)=0$ olmasını gerektirir.

$$ψ\left(x=0\right)=0 ⇒B=0$$

$$ψ\left(x=a\right)=0⇒Asinka0=$$

$$ka=nπ n=1,2,3…$$

$$k\rightarrow k\_{n}=\frac{nπ}{a}$$

değerlerini alabilmektedir.

$$E\rightarrow E\_{n}=\frac{ℏ^{2}k\_{n}^{2}}{2m}=\frac{ℏ^{2}π^{2}}{2ma^{2}}n^{2} n=1,2,3,…$$

Enerji kuantumlanmıştır, yani parçacık sadece belirli enerji değerlerine sahip olabilir.

$ψ\_{n}=\sqrt{\frac{2}{a}}sin\frac{nπx}{a} 0\leq x\leq a$ bağlı öz-fonksiyonlar.



Koyu çizgi ile gösterilen dalga fonksiyonu, kesikli çizgi ise olasılık dağılımını göstermektedir. Parçacık kuyuda x-ekseni boyunca, $0\leq x\leq a$ aralığında her noktada aynı olasılıkla bulunamıyor.

*Kuyu Potansiyeli II.*



$$V\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}V\_{0} \left|x\right|>a/2 \\0 \left|x\right|<a/2\end{array}\right.$$

$$ψ\_{I}=Ae^{k\_{1}x}+Be^{-k\_{1}x} x<-\frac{a}{2} k\_{1}=\sqrt{\frac{2m(V\_{0}-E)}{ℏ^{2}}}$$

$$ψ\_{II}=Ce^{ik\_{2}x}+De^{-ik\_{2}x} \left|x\right|\leq \frac{a}{2} k\_{2}=\sqrt{\frac{2mE}{ℏ^{2}}}$$

$$ψ\_{III}=Fe^{k\_{1}x}+Ge^{-k\_{1}x} x>-\frac{a}{2} $$

I. Bölgede dalga fonksiyonunun $x\rightarrow -\infty $giderken sonlu olabilmesi için B = 0;

III. Bölgede dalga fonksiyonunun $x\rightarrow \infty $giderken sonlu olabilmesi için F = 0 olmalıdır.

$x=\mp a/2$ noktalarında süreklilik şartının uygulaması sonucu,

$$k\_{1}=k\_{2}tan\frac{k\_{2}a}{2}$$

veya

$$k\_{1}=-k\_{2}cot\frac{k\_{2}a}{2}$$

bağlantıları elde edilir. Parçacığın dalga fonksiyonu sürekli olabilmesi için parçacığın enerjisi E, bu bağlantıları sağlayan değerlere haiz olabilir.

Yukarıdaki denklemler;

$$αtanα=\sqrt{P^{2}-α^{2}} α=k\_{2}a/2$$

$$-αcotα=\sqrt{P^{2}-α^{2}} P=\sqrt{mV\_{0}a^{2}/2ℏ^{2}}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler sayısal olarak veya grafik yardımıyla çözülebilir. Denklemin her iki tarafı $α$’nın fonksiyonu olarak grafik üzerinde çizilirse sağa taraf P-yarıçaplı bir daire tanımlar.



Eğrilerin kesim noktaları ise çözümleri verir. Dolayısıyla çözümlerin sayısı P’nin büyüklüğü ile yani $V\_{0}$ değerinin büyüklüğü ile belirlenir. (Not: sonsuz derinlikteki kuyuda sonsuz tane çözüm vardı.)

$P<π/2$ 1 tane bağlı öz fonksiyon

$π/2<P<π$ 2 tane bağlı öz fonksiyon

Böyle bir fiziksel sistemi inceler ve sistemin sadece tek bağlı öz-fonksiyona sahip olabileceğini görürsek etkileşim potansiyeli hakkında bazı limit değerler bulabiliriz. Benzer bir teknik bize nükleer potansiyelin derinliğini tahmin etmemizi sağlar.

Örnek: döteron, iki nükleondan oluşan en basit bağlı sistem, sadece bir tane bağlı öz-fonksiyonu vardı.



*Basit Harmonik Osilatör*

Herhangi bir, iyi-davranışlı potansiyel $V(x)$, $x\_{0}-$noktası civarında Taylor serisini açılabilir.

$$V\left(x\right)=V\left(x\_{0}\right)+\left(\frac{dV}{dx}\right)\_{x=x\_{0}}\left(x-x\_{0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^{2}V}{dx^{2}}\right)\_{x=x\_{0}}\left(x-x\_{0}\right)^{2}+…$$

Eğer $x\_{0}$ potansiyelin minimumu ise $\left(\left.\frac{dV}{dx}\right|\right)$ ikinci terim yok olur, ilk terimin enerjiye katkısı bir sabit olduğundan, üçüncü terim önem kazanır.

İlk yaklaşım olarak, sistem minimum değerine yakın enerjilerde basit harmonik osilatör gibi davranır.

$V\left(x\right)=\frac{1}{2}kx^{2}$ potansiyeli için

$ψ\_{n}\left(x\right)=AH\_{n}\left(αx\right)e^{-α^{2}x^{2}/2} α^{2}=\sqrt{km}/ℏ$

$E\_{n}=ℏω\_{0}\left(n+\frac{1}{2}\right) ω\_{0}=\sqrt{k/m}$

$H\_{n}(αx)$’de n-inci mertebeden Hermit polinomudur.



$E>V(x)$ Bölgelerinde dalga fonksiyonu sinüseldir.

$E<V(x)$ Bölgelerinde dalga fonksiyonu üsteldir.

*ÖZET*

1. Kuantum dalgaları, aynen klasik dalgalar gibi bir potansiyel engelli ile karşılaştıkları zaman yansıma ve atlama yaparlar.
2. Bir dalga paketi klasik olarak yasaklanan bölgeye sızabilir ve aşmak için yeterli enerjisi olmasa bile potansiyel engelinin diğer tarafında görülebilir.
3. Dalga fonksiyonu $E>V(x)$ olduğu zaman osilasyon yapar ve $E<V(x)$ bölgesinde ise üstel olarak azalırlar.
4. Potansiyel parçacığın hareketini uzayan bir bölgesini sınırladığı zaman bağlı öz-fonksiyonlar oluşur ve parçacık kesikli enerji değerlerine sahip olabilir. İzin verilen enerji değerlerinin sayısı ile potansiyelin derinliği tarafından belirlenir.