NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Monte Carlo Yöntemleri ve Simulasyon

- Simulasyon veya benzetişim şans(rasgelelik) faktörünün devreye girdiği bir fiziksel durumu göz önüne alıp, durumun bilgisayarda taklidini üretme işlemidir.
- Bu kesimde bazı klasik örnekler üzerinden simulasyon fikrini açıklayacağız.

Simulasyon problemlerinin çoğunda, önceden bellirlenmiş bir dağılıma sahip rasgele değişkenler üretiriz. Örneğin farklı çıktı olasılıklarının aşağıdaki gibi belirlendiği hileli bir zar atışının simulasyonunu yapmak isteyelim:

Çıktı	1	2	3	4	5	6
Olasılık	0.2	0.14	0.22	0.16	0.17	0.11

Eğer x rasgele değişkeni $(0, 1)$ aralığında düzgün dağılıma sahipse, bu durumda aralığı tabloda verilen uzunluklarda altı altaralığa ayırırsak, bu hileli zar atışını benzetmiş oluruz. Eğer x $(0, 0.2)$ aralığında ise zar 1 değerini, eğer x $[0.2, 0.34)$ aralığında ise zar 2 değerini, eğer x $[0.34, 0.56)$ aralığında ise zar 3 değerini v.s. gösterir.
Örnek çıktı: 5000 denemede s[1] $=$ 982, s[2] $=$ 676 s[3] $=$ 1093 s[4] $=$ 837 s[5] $=$ 881 s[6] $=$ 531

- Simulasyonla çözülebilecek ilginç bir problem ünlü **doğumgünü** problemidir. Yılın her bir gününün birinin doğum günü olması olasılığının eşit olduğu, N kişilik bir grubu göz önüne alalım. Grupta bulunan en az iki kişinin doğum günlerinin aynı olma olasılığının %50 den fazla olması için (beklenenin aksine) sadece 23 kişinin yeterli olacağı olasılık teorisinden hesaplanabilir. (Sınıftaki arkadaşlarınız arasında deneyebilirsiniz!)
- Bu sonucun bir çok kişiyi teorik neden hakkında şüpheye düşürmesi nedeniyle, teoriyi kısaca hatırlarsak, N. kişinin önceki $(N-1)$ kişiden farklı bir doğum gününe sahip olma olasılığı $\left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-(N-1)}{365}\right)$ dir. O halde N. kişinin doğumgününün öncekilerden biriyle çakışma olasılığı

$$1-\left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-(N-1)}{365}\right)$$

olup, böylece $N=23$ için bu değer 0.507 bulunur. $n=55$ için ise bu değer 0.986 dır.

- Olasılık teorisini kullanmadan bilgisayar simulasyonu ile problemi çözmek için bilgisayara $\{1, 2, 3, ..., 365\}$ sayıları arasından rasgele N tane seçtirerek en az iki tanesinin aynı olup olmadığına bakılır. Bu işlem M sayıda tekrarlandığında, eğer en az iki tanesinin aynı olduklarının sayısı K ise, bu durumda olasık K/M olarak elde edilir.

Örnek çıktı:

n kişilik doğumgünü simulasyonu

Kişi sayısı	Teorik	1000	5000
5	0.027	0.024	0.0284
15	0.253	0.272	0.244
22	0.476	0.49	0.482
23	0.507	0.469	0.5094
25	0.569	0.56	0.5688
35	0.814	0.818	0.8176
45	0.941	0.937	0.9354
50	0.970	0.965	0.9694
55	0.986	0.984	0.9878

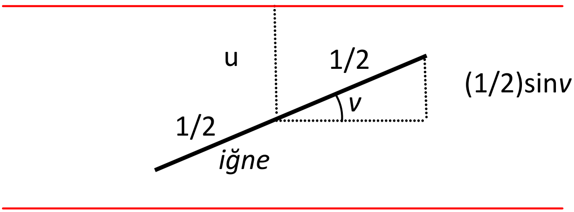


Figure: İğne problemi

- Bir kağıt parçası üzerine çizilmiş 1 birim genişlikli bir şerit üzerine bırakılan 1 birim uzunluklu bir iğnenin şeritlerden birine değme olasılığı nedir?

Problemi netleştirmek için, iğnenin merkezinin şeritler arasında rasgele bir noktaya değdiğini varsayalım. Ayrıca iğnenin açısal yerleşiminin de bir başka rasgele değişken olduğunu varsayalım. İğnenin merkezinin yakın şeride olan uzaklığı u ve yatayla yaptığı açı v olsun. Burada u ve v rasgele değişkenlerdir. İğnenin çizgilerden birine değmesi için gerek ve yeter koşul $u \leq \frac{1}{2}\sin v$ olmasıdır. Simetri nedeniyle u yu $(0, \frac{1}{2})$ aralığında ve v yi de $(0, \pi/2)$ aralığında düzgün dağılımlı seçmemiz ve $2u \leq \sin v$ olanlarının sayısını belirlememiz yeterlidir. w $(0, 1)$ den N kez seçilen rasgele bir sayı olmak üzere $w = 2u$ alıp $w \leq \sin v$ lerin K sayısını belirlersek olasılık K/N olacaktır.

Bazı sonuçlar: Teorik sonuç: $\dfrac{2}{\pi} \approx 0.63662$

N= 1000 için 0.644
N= 2000 için 0.634
N= 3000 için 0.647333
N= 4000 için 0.637
N= 5000 için 0.638

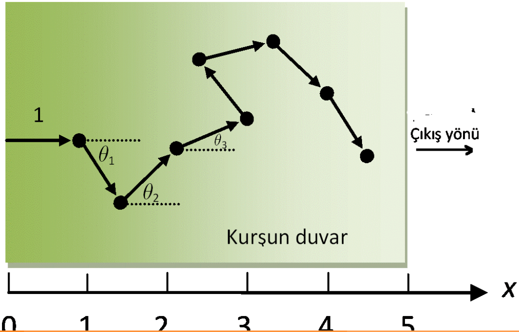
İki zar atıldığını varsayalım. (Hilesiz) bir zar için $1, 2, 3, 4, 5$ ve 6 nın gelme olasılıkları aynıdır. 24 atışta iki zarın toplamının 12 (6 ve 6) gelme olasılığı nedir?

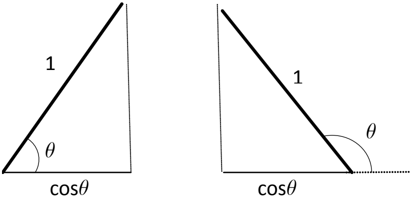
- Bir çift zar atışında 36 olası çiften sadece bir tanesi $(6, 6)$ olup, o halde 36 çiftten 35 tanesi yanlıştır. O halde 24 denemede $(6, 6)$ gelmeme olasılığı $(35/36)^{24}$ olur. Böylece $(6, 6)$ gelme olasılığı $1 - (35/36)^{24} = 0.4914$ dır.
- Durumu bilgisayarda simulasyon ile elde etmek istersek; bir deneme, zar çiftinin 24 defa atılmasını içerir. Bu denemeyi N kez uygulayıp, olayın gerçeklenenlerinin K sayısını belirlemeliyiz. Bir zar atışı için $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinden düzgün dağılımlı rasgele bir sayı seçmeliyiz. Bunun için ise, eğer x $(0, 1)$ aralığından rasgele bir değişken ise, $6x + 1$ de $(1, 7)$ aralığında rasgele bir değişken olup, bunun tam kısmı $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinden rasgele bir sayıyı vermiş olur.

Örnek çıktı: **N= 1000 sonuç= 0.496; N = 5000 sonuç = 0.4914**

Son örneğimiz nötron kalkanını içermektedir. Nötronların bir kurşun duvardan geçtiği basit bir modeli göz önüne alalım. Her bir nötronun kurşun duvara dik açı ile girdiğini ve bir birim ilerlediğini varsayalım. Daha sonra bir kurşun atomuyla çarpışsın ve rasgele bir yöne sıçrasın. Tekrar, bir başka kurşun atomuyla çarpışmadan önce bir birim ilerlesin. Tekrar yön değiştirerek bu şekilde devam etsin. 8 çarpışmadan sonra nötronun tüm enerjisinin bittiğini varsayalım. Ayrıca, duvarın 5 birim kalınlığında sonsuz ve sınırsız boyda olduğunu varsayalım.

Soru: **Nötronların yüzde kaçı duvarın diğer tarafından çıkar?**





x nötronun girdiği başlangıç yüzeyinden ölçülen uzaklığı göstersin. Trigonometriden bilmekteyiz ki, hipotenüsü 1 olan bir dik üçgende kenarlardan biri $\cos\theta$ dır. Ayrıca, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ için $\cos\theta \leq 0$ olduğuna dikkat edelim. İlk çarpışma $x = 1$ olan bir noktada oluşur; ikinci çarpışma $x = 1 + \cos\theta_1$ de gerçekleşir; üçüncü çarpışma $x = 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2$ de gerçekleşir ve bu şekilde devam eder. Eğer $x \geq 5$ ise nötron diğer taraftan çıkar. Sekiz çarpışma sonucunda $x < 5$ ise duvar arkasındaki bölgeyi o nötrondan korumuş olur. Bir Monte Carlo simulasyonu için simetriden dolayı $(0, \pi)$ aralığında rasgele θ_i açılarını kullanabiliriz.

Bazı çıktılar: **1000 nötronda 100** (%1).