**Tanım (Gradiyent)**: bir fonksiyon ve olsun. Bu durumda nin daki gradiyenti, de

vektörüdür.

Gradiyent optimizasyonda oldukça önemli bir kavramdır. Kullanışlı bir çok özelliğe sahip olmakla birlikte yönlü türev ile arasındaki ilişki kritik bir önem sahiptir.

**Teorem** diferensiyellenebilir ise bütün yönlü türevleri mevcuttur. Dahası ’nin ’daki doğrultusundaki Matematikte vektör uzaylari üzerinde şeklinde tanımlanan fonksiyonların bir x noktasındaki değişimi incelenen yöne de bağlıdır. Yöne bağlı olarak fonksiyonun değişim hızını incelemek “yöne gore türev” kavramını doğurmuştur.

**Teorem**: diferensiyellenebilir ve olsun. Eğer ise bu durumda , ’nin en hızlı arttığı yönü işaret eder.

İspat: , z’nin ’daki, v yönündeki türevi idi. v’nin birim vector olduğunu kabul edelim. Bu durumda

dir. Burada , arasındaki açıdır. için maksimumdur. Bu durumda v ve paralel vektörlerdir.

yönlü türevi ;

dir.

Ispat. ….

Vektör uzaylari üzerinde şeklinde tanımlanan fonksiyonların bir x noktasındaki değişimi incelenen yöne de bağlıdır. Yöne bağlı olarak fonksiyonun değişim hızını incelemek “yöne gore türev” kavramını doğurmuştur.

**Teorem**: diferensiyellenebilir ve olsun. Eğer ise bu durumda , ’nin en hızlı arttığı yönü işaret eder.

**İspat:** , z’nin ’daki, v yönündeki türevi idi. v’nin birim vector olduğunu kabul edelim. Bu durumda

dir. Burada , arasındaki açıdır. için maksimumdur. Bu durumda ve paralel vektörlerdir. (Eğer ise bu durumda yönlü türev tüm yönlerde sıfırdır. )

**Teorem:** diferensiyellenebilir ve , sabit için z(x)=k ile tanımlı S seviye kümesi üzerinde olsun. S seviye kümesi üzerinde o.ü. tamamen S’de içerilen bir c(t) eğrisinin t=0’daki teğet vektörü v ise bu durumda , S’ye diktir. Yani ’dır.

**Not.** İspatı vermeden once aşağıdaki şekile bakalım. ve noktası için ’dür. Şekilde, seviye eğrisi üzerinde (1,1) noktasındaki teğet doğrusu, gradiyentin ve seviye eğrisinin dikliğini göstermek için vurgulanmıştır

 

**İspat:** S üzerinde bir eğri c(t) olsun. Bu durumda ve dir. v, c üzerinde t=0’da bir teğet vektörü olsun. Bu durumda

dir. Zincir kuralından z(c(t))’nin t=0 da t’ye gore türevinden;

Buna göre gradiyent vektör ve teğet vektör birbirine dik olup dolayısıyla gradiyent vektör yüzey eğrisine diktir.

**Not:** Yukarıdaki teoremin n=2 özel durumunun ispatını inceleyelim:

Herhangi bir z(x,y) fonksiyonu için bir seviye kümesi olmak üzere

denklemi ile tanımlı kapalı eğridir. Kapalı fonksiyonun türevi yardımıyla herhangi bir noktasında bu eğrinin herhangi bir teğet doğrusunun denklemini yazılabiliriz;

Teğet denkleminin eğimi;

den

olup bu noktadaki teğet denklemi

dır. Şimdi bu doğruya parallel bir vektörü yine bu doğru üzerinde ve gibi iki nokta alarak vektörü şeklinde hesaplayabiliriz. Biliyoruz ki , doğru üzerinde olduğundan teğet denklemini sağlamalıdır, yani;

dır. Böylece teğet düzleme parallel bir

vektörümüz var. Şimdi de bu vektör ile

gradiyent vektörünün iç çarpımlarını hesaplayalım;

elde edilir. Böylece gradiyent vektör ve v vektörleri birbirine diktir.

**Örnek:**  ile verilen yüzeyi ele alalım. Bu fonksiyonun seviye eğrileri

olup noktasındaki teğetin eğimi

dir. Bu durumda teğet doğrusu

dir. Diğer taraftan bu doğruya paralel bir vektör olup

elde edilir. Böylece **:**  nin herhangi bir seviye eğrisi üzerindeki herhangi bir noktadaki gradiyenti, yine bu noktadaki teğet doğrusuna diktir.