Tanım: (Ω, U, P) olasılık uzayında, $A, B \in U$ olayları için

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

oluyorsa, A ile B olaylarına bağımsız olaylar denir.

Ayrık olaylar: $A \cap B = \varnothing$
Bağımsız olaylar: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
$\varnothing$ ve Ω olayları her olaydan bağımsızdır.

Teorem: (Ω, U, P) olasılık uzayında $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ olsun.

$$A \text{ ile } B \text{ ayrık} \Rightarrow A \text{ ile } B \text{ bağımsız değil}$$

dir.
İspat: Varsayalım ki A ile B bağımsız olsun. O zaman $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ olmalıdır. A ile B ayrık olduğundan $\mathrm{P}(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ dır. Ancak $\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) \neq 0$ dır. Çelişki. Bu çelişki varsayımdandır. Varsayım doğru değildir, yani Aile B bağımsız değildir.

Sonuç: A ile B bağımsız $\Rightarrow A$ ile B ayrık değil
İspat: (aşikâr)
Örnek $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $(\Omega, U = 2^{\Omega}, P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)})$, A={a , b} , B={b , d} olsun. A ile B bağımsız mıdır?

$$\mathrm{P}(A \cap B) \overset{?}{=} \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}$$

olduğundan A ile B bağımsızdır.

C={c} olmak üzere, A ile C bağımsız mıdır? A ile C ayrık olduklarından bağımsız değillerdir.

$\Omega = \{a, b, c, d\}$, $(\Omega, U = 2^{\Omega}, \mathrm{P}^*)$, $P^*(\{a\}) = P^*(\{b\}) = P^*(\{c\}) = \dfrac{1}{5}$, $P^*(\{d\}) = \dfrac{2}{5}$ gibi bir olasılık uzayında $P^*(A \cap B) \neq P^*(A).P^*(B)$ olduğundan A ile B bu uzayda bağımsız değildir.
Teorem: Bir (Ω, U, P) olasılık uzayında A ile B bağımsız ise

a) $\overline{A}$ ile B bağımsız
b) A ile $\overline{B}$ bağımsız
c) $\overline{A}$ ile $\overline{B}$ bağımsız

dır.
İspat: a) (Ω, U, P) de A ile B bağımsız, yani

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A).P(B) \\ &= (1 - P(A)).\ P(B) \\ &= P(\overline{A}).P(B) \end{aligned}$$

olup, $\overline{A}$ ile B bağımsızdır.
(b) ve (c) şıkları (a) şıkkının bir sonucudur.

Tanım: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $A_1, A_2, ..., A_n \in U$ olsun.

* $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i).\mathrm{P}(A_j)$ $(1 \le i < j \le n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına ikili bağımsız
* $\mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathrm{P}(A_i).\mathrm{P}(A_j).\mathrm{P}(A_k)$ $(1 \le i < j < k \le n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına üçlü bağımsız

...

* $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... A_n) = \mathrm{P}(A_1).\mathrm{P}(A_2)...\mathrm{P}(A_n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına n-li bağımsız denir.

$A_1, A_2, ..., A_n$ olayları ikili, üçlü, ... , n-li bağımsız olduklarında bu olaylara tam bağımsız denir.

Olaylar için k-li bağımsızlık m-li bağımsızlığı gerektirmez. Bunu aşağıdaki ilk iki örnek üzerinde görelim.

Örnek $\quad (\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, (\Omega, U = 2^{\Omega}, P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)})$ olasılık uzayı için,

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_4\},\ A_2 = \{\omega_2, \omega_4\}, A_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$$

olsun. $k = 2$ için,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

dır, yani A_1, A_2, A_3 olayları $2-$li bağımsızdır. $k = 3$ için

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ne P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

dır, yani A_1, A_2, A_3 olayları $3-$lü bağımsız değildir.

Örnek $\quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, p_1 = 2/16, p_2 = 5/16,\ \ p_3 = 1/16,\ \ p_4 = 6/16,\ \ p_5 = 1/16,$

$p_6 = 1/16,\ U = 2^{\Omega}$, $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$ olmak üzere,

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_4\},\ A_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}, A_3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

olsun. $k = 2$ için,

$$P(A_1 \cap A_2) \ne P(A_1)P(A_2) \quad \left(\frac{2}{16} \ne \frac{8}{16} \times \frac{8}{16}\right)$$

olduğundan A_1, A_2, A_3, $2-li$ bağımsız değildir. $k = 3$ için,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad \left(\frac{2}{16} = \frac{8}{16} \times \frac{8}{16} \times \frac{8}{16}\right)$$

olduğundan, A_1, A_2, A_3 olayları 3-lü bağımsızdır.

Örnek $\quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\},\ \ p_i = 1/8, i = 1, 2, \ldots, 8\ \ U = 2^{\Omega}$, $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$ olmak üzere,

$$A_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5\}, A_2=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6\}, A_3=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4,\omega_7\}$$

olsun. $k=2$ için,

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)\quad\left(\frac{2}{8}=\frac{4}{8}\times\frac{4}{8}\right)$$

$$P(A_1\cap A_3)=P(A_1)P(A_3)\quad\left(\frac{2}{8}=\frac{4}{8}\times\frac{4}{8}\right)$$

$$P(A_2\cap A_3)=P(A_2)P(A_3)\quad\left(\frac{2}{8}=\frac{4}{8}\times\frac{4}{8}\right)$$

dır, yani A_1,A_2,A_3 $2-$li bağımsızdır. $k=3$ için,

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

dır, yani A_1,A_2,A_3 $3-$lü bağımsızdır.

Bu örnekteki A_1,A_2,A_3 olayları tam bağımsızdır.

Problem (Ω,U,P) bir olasılık uzayı, $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\in U$ olayları tam bağımsız ve her birinin olasılığı 1/3 olsun.

a) A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 olaylarından hiç birinin gerçekleşmemesi olasılığı nedir?

Deney sonucunda A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 olaylarından hiç birinin gerçekleşmemesi olayı $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\cap\bar{A}_5$ olmak üzere bu olayın olasılığı,

$$P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\cap\bar{A}_5)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)=(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}$$

dır.

b) A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 olaylarından en az birinin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Deney sonucunda A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 olaylarından en az birinin gerçekleşmesi olayı $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$ olmak üzere bu olayın olasılığı,

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5})=1-P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\cap\bar{A}_5)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)=1-(\frac{2}{3})^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

dır.

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 5}P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le 5}P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

$$-\sum_{1\le i<j<k<l\le 5}P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 5}P(A_i)P(A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le 5}P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$-\sum_{1\le i<j<k<l\le 5} P(A_i)P(A_j)P(A_k)P(A_l)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$$

$$=5\times\frac{1}{3}-10\times(\frac{1}{3})^2+10\times(\frac{1}{3})^3-5\times(\frac{1}{3})^4+(\frac{1}{3})^5$$

$$=\frac{211}{243}$$

c) A_1, A_2, A_3 olaylarından yalnız birinin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Deney sonucunda A_1, A_2, A_3 olaylarından yalnız birinin gerçekleşmesi olayı,

$$A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3 \;\cup\; \bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3 \;\cup\; \bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3$$

olmak üzere bu olayın olasılığı,

$$P\left(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\right)=P\left(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\right)+P\left(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\right)+P\left(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

dır.

d) A_1, A_2, A_3 olaylarından yalnız ikisinin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Deney sonucunda A_1, A_2, A_3 olaylarından yalnız ikisinin gerçekleşmesi olayı,

$$A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3 \;\cup\; A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3 \;\cup\; \bar{A}_1\cap A_2\cap A_3$$

olmak üzere,

$$P\left(A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3 \cup A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3 \cup \bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)=P\left(A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3\right)+P\left(A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\right)+P\left(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

dır.

e) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 olaylarından yalnız ikisinin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

$$p=\binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{5.4}{1.2}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{27}=\frac{80}{243}$$

f) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 olaylarından en az ikisinin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

$$p=\binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3+\binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2+\binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1+(\frac{1}{3})^5=\frac{80}{243}+\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{131}{243}$$

$$p=1-\binom{5}{0}(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^5-\binom{5}{1}(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^4=1-\frac{32}{243}-\frac{80}{243}=\frac{131}{243}$$