OLASILIK HESABI

Bu derste, uygulamalarda sıkça karşılaşılan, Olasılık Uzaylarından bazılarına değineceğiz ve verilmiş bir Olasılık Uzayında olasılık hesabı yapacağız.

1. Ω sonlu sayıda elemana sahip olsun. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, $U=2^{\Omega}$ olmak üzere, Ω nın her bir ω_i, $i=1,2,\ldots,n$ elemanına aşağıdaki özelliklere sahip bir p_i sayısı karşılık getirilsin.

1) $p_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$

2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Aşağıdaki gibi tanımlanan,

$$P: U \to \mathbb{R}$$

$$A \to P(A)=\sum_{\omega_i\in A} p_i$$

fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür. $p_1=p_2=\cdots=p_n$ olduğunda,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

olacaktır.

<u>Örnek:</u> $\Omega= \ \omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$, $U=2^{\Omega}$ ve Ω nın elemanlarına karşılık getirilen sayılar sırasıyla,

$$p_1=0.1\ ,\ p_2=0.2\ ,\ p_3=0.3\ ,\ p_4=0.2\ ,\ p_5=0.1\ ,\ p_6=0.1$$

olsun. Bu sayılara dayalı olarak tanımlanan,

$$P: U \to \mathbb{R}$$

$$A \to P(A)=\sum_{\omega_i\in A} p_i$$

Olasılık Ölçüsüne göre,

$$P(\ \omega_6\ )=0.1$$

$$P(\ \omega_1,\omega_3,\omega_5\ )=0.1+0.3+0.1=0.5$$

$$P(\ \omega_2,\omega_4,\omega_6\ )=0.2+0.2+0.1=0.5$$

olur. $A= \ \omega_1,\omega_3,\omega_5$ ve $B= \ \omega_5,\omega_6$ olayları için

$$P(A)=P(\ \omega_1,\omega_3,\omega_5\ )=0.5$$

$$P(B)=P(\ \omega_5,\omega_6\ )=0.2$$

$$P(A\cap B)=P(\ \omega_5\ )=0.1$$

$$P(A\cup B)=P(\ \omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\ =0.6$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(\ \omega_6\ )=0.1$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.5$$

dır.

Böyle bir Olasılık Uzayı hangi deneyin modellenmesinde (hangi deneyin anlama-anlatımında) kullanılabilir? Örneğin, içinde 1 beyaz, 2 siyah, 3 mavi, 2 yeşil, 1 sarı, 1 kırmızı top bulunan bir torbadan bir top çekilmesi ve renginin gözlenmesi deneyinde, ya da 10 beyaz, 20 siyah, 30 mavi, 20 yeşil, 10 sarı, 10 kırmızı top bulunan bir torbadan bir top çekilmesi ve renginin gözlenmesi deneyinde kullanılabilir. Bir torbada bilinmeyen oranlarda altı farklı renkten top bulunsa, bir top çekilmesi ve renginin gözlenmesi deneyi için bir Olasılık Uzayı nasıl oluşturulabilir?

Aşağıdaki olasılık uzayı hangi deneylerin modellenmesinde kullanılabilir?

$$\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$$

$$U = 2^{\Omega}$$

$$p_1 = \frac{1}{6}\ ,\ p_2 = \frac{1}{6}\ ,\ p_3 = \frac{1}{6}\ ,\ p_4 = \frac{1}{6}\ ,\ p_5 = \frac{1}{6}\ ,\ p_6 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P:\ U &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{n(A)}{6} \end{aligned}$$

Bu olasılık uzayı düzgün bir tavla zarının atılması deneyinde kullanılabilir mi?

$\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ üzerinde kaç tane olasılık uzayı oluşturulabilir? Ω nın elemanlarına,

1) $p_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,3,4,5,6$

2) $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

olmak üzere, sonsuz farklı şekilde $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ sayıları karşılık getirilebilir. Bu sonsuz tane Olasılık Uzayından hangisi elimizdeki tavla zarını modellemektedir? Zarın maddesel olarak homojen olduğunu düşünürsek, $p_1 = \frac{1}{6}\ ,\ p_2 = \frac{1}{6}\ ,\ p_3 = \frac{1}{6}\ ,\ p_4 = \frac{1}{6}\ ,\ p_5 = \frac{1}{6}\ ,\ p_6 = \frac{1}{6}$ alınması uygun görünmektedir. Yüzeylerdeki noktalar için açılan kuyular göz önüne alınırsa,

$$p_1 = 0.164\ ,\ p_2 = 0.165\ ,\ p_3 = 0.166\ ,\ p_4 = 0.167\ ,\ p_5 = 0.168\ ,\ p_6 = 0.170$$

önerilebilir.

Bundan sonra, tavla zarları (hilesiz) için,

$$\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$$

$$U = 2^{\Omega}$$

$$p_1 = \frac{1}{6}\ ,\ p_2 = \frac{1}{6}\ ,\ p_3 = \frac{1}{6}\ ,\ p_4 = \frac{1}{6}\ ,\ p_5 = \frac{1}{6}\ ,\ p_6 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P:\ U &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{n(A)}{6} \end{aligned}$$

Olasılık Uzayını kullanacağız. Atış sırasında “zar tutmayı” aklınıza getirmeyin.

.

2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ olsun. Sayılabilir sonsuz elemana sahip olan Ω ‘nın her ω_i elemanına aşağıdaki özellikleri sağlayan bir p_i sayısı karşılık getirilsin.

1) $p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$U = 2^{\Omega}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} P:\ U &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \end{aligned}$$

fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür.

<u>Örnek:</u> $\Omega = \ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, $U = 2^{\Omega}$ ve Ω ‘nın elemanlarına karşılık getirilen sayılar sırasıyla,

$$p_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ p_2 = \frac{1}{2^2}\ ,\ \ p_3 = \frac{1}{2^3}\ ,\ \ldots$$

olsun. Bu sayılara dayalı olarak tanımlanan,

$$\begin{aligned} P:\ U &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \end{aligned}$$

olasılık ölçüsüne göre,

$$P(\ \omega_1\ ) = 0.5$$

$$P(\ \omega_1, \omega_3, \omega_5\ ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{25}{32} \approx 0.782$$

$$P(\ \omega_3, \omega_4, \omega_5, \ldots\ ) = 1 - P(\ \omega_1, \omega_2\ ) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = 0.25$$

olur. $A = \ \omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots$ ve $B = \ \omega_5, \omega_6$ olayları için

$$P(A) = P(\ \omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots\ ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(\ \omega_5, \omega_6\ ) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{3}{64}$$

$$P(A \cap B) = P(\ \omega_5\ ) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{64} - \frac{2}{32} = \frac{125}{192}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\ \omega_6\ ) = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/32}{3/64} = \frac{2}{3}$$

dır.

Böyle bir Olasılık Uzayı hangi deneyin modellenmesinde (hangi deneyin anlama-anlatımında) kullanılabilir? Örneğin, düzgün bir paranın tura gelinceye kadar atılması ve üste gelen yüzeyin gözlenmesi deneyinde kullanılabilir. Bu durumda Örnek Uzay,

$$\Omega = \ Y, YT, YYT, YYYYT, YYYYT, ...$$

olup, yukarıdaki A olayı, turanın tek sayılı atışlarda gelmesi olayı olacaktır.

3. $\Omega = \mathbb{R}$ (veya $\Omega \subset \mathbb{R}$) olsun. Ölçme sonuçları genellikle sayı olarak ifade edildiğinden bu en çok karşılaşılan bir durumdur. Böyle bir Ω Örnek Uzayındaki olaylar (altkümeler) içinde bizi en çok ilgilendirenler aralık türünden olanlardır. $\mathbb{R}$, reel sayıların kümesinde

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ olmak uzere $U_1 = \{(a,b) : a < b, a,b \in R\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ olmak uzere $U_2 = \{[a,b] : a \leq b, a,b \in R\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ olmak uzere $U_3 = \{(a,b] : a < b, a,b \in R\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ olmak uzere $U_4 = \{[a,b) : a < b, a,b \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ olmak uzere $U_5 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty, a] = [x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ olmak uzere $U_6 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ olmak uzere $U_7 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ olmak uzere $U_8 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

sınıfları birer σ-cebir değildir. $U = 2^{\Omega}$ kuvvet kümesi bu sınıfların her birini kapsamaktadır. $U = 2^{\Omega}$ kuvvet kümesi bir σ-cebirdir. Ancak, bu σ-cebir üzerinde Olasılık Ölçüsü tanımlamak matematik teorisi açısından sıkıntılı olmaktadır. Bunu ileride kavrayabilecek düzeye geleceksiniz. Örnek Uzayımız reel sayılar olduğunda, σ-cebir olarak tüm aralıklar ile bunlar üzerinde $\cup, \cap, /$ işlemlerinin sonlu veya sayılabilir sonsuz kez uygulanmasıyla ortaya çıkan kümelerden oluşan ve adına Borel Cebiri denen σ-cebir kullanılacaktır. Borel Cebiri genellikle $\mathcal{B}$ harfi ile gösterilmektedir. P Olasılık Ölçüsünün $\mathcal{B}$ de tanımlı olduğunu düşüneceğiz.

$$\begin{aligned} P : \mathcal{B} &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

ve $P(\mathbb{R}) = 1$ olup, bir birim olasılık $\mathbb{R}$ üzerine dağılmış olacaktır. $\mathbb{R}$ üzerindeki bir P olasılık ölçüsüne olasılık dağılımı da denmektedir.