

## RASGELE DEĞİŞKENLER

Bir olasılık deneyinin sonuçlarının kümesi olan  $\Omega$  Örnek Uzayının elemanları çok değişik türde olabilir. Rasgele Değişkenler yardımıyla  $\Omega$  nın elemanları reel sayılara dönüşmektedir. Rasgele Değişkenler, ilgilenilen özelliğin ölçülerek sayısallaştırılmasının matematiksel karşılığı olmaktadır. Bir tavla zarının atılması ve üste gelen yüzeyin gözlenmesi deneyinde üst yüzeydeki nokta sayısı ölçüldüğünde (sayma ölçüsüne göre), Örnek Uzayın elemanları sayılara dönüşmektedir. Zar üzerinde bu sayılar yazılı değildir, bunlar ölçme sonucu ortaya çıkmaktadır. Rasgele Değişken bu ölçmeye karşılık gelmektedir. Bir yaşındaki çocukların belli bir kitlesinden rasgele bir çocuğun seçilmesinde Örnek Uzay, bu çocukların isimlerinin kümesi olabilir. Seçilen çocuğun boy uzunluğunun ölçülmesi sonucunda bir sayı ortaya çıkmaktadır. Rasgele Değişken bu ölçmeye karşılık gelmektedir. Rasgele Değişken, Örnek Uzayın elemanlarını reel sayılara dönüştüren bir fonksiyon olmakla birlikte, aşağıdaki tanımda verilen özelliği (Borel ölçülebilir bir fonksiyon olma özelliğini) de sağlaması gerekir.

**Tanım**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

olmak üzere,  $\forall a \in \mathbb{R}$  için,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in U$$

oluyorsa  $X$  fonksiyonuna bir **Rasgele Değişken** denir.

Rasgele değişkenler genellikle  $X, Y, Z, U, V, \dots$  gibi büyük harflerle gösterilir. Kısalık olması bakımından  $A \subset \mathbb{R}$  için  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$  yerine  $(X \in A)$  yazılır. Örneğin,

$$(X = a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$$

$$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

$$(a < X \leq b) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$$

dır.

Bir  $X$  rasgele değişkenin tanım kümesi  $\Omega$  olmak üzere,

$$X(\Omega) = \{x : x \in \mathbb{R}, \exists \omega \in \Omega \text{ için } X(\omega) = x\}$$

kümesine,  $X$  in değer kümesi ( $X$  in aldığı değerlerin kümesi) denir. Bu kümeyi bazen  $D_X$  veya sadece  $D$  ile göstereceğiz.

**Örnek** Bir tavla zarının atılması ve üste gelen yüzeyin gözlenmesi deneyinde örnek uzay,

$$\Omega = \{ \square, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \}$$

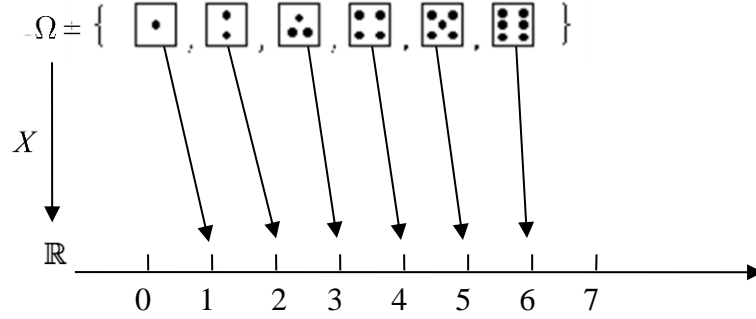
olmak üzere,  $U = 2^\Omega$  olsun. Zar düzgün olduğunda,

$$P: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

olasılık ölçüsü kullanılabilir.

$(\Omega, U, P)$  olasılık uzayından reel sayılara tanımlı,



fonksiyonu,  $\forall a \in \mathbb{R}$  için,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in U$$

özelliğine sahiptir. Örneğin,

$$a < 0 \quad \text{ise} \quad (X \leq a) = \emptyset \in U$$

$$0 \leq a < 1 \quad \text{ise} \quad (X \leq a) = \{ \square \} \in U$$

$$1 \leq a < 2 \quad \text{ise} \quad (X \leq a) = \{ \square, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \} \in U$$

$$2 \leq a < 3 \quad \text{ise} \quad (X \leq a) = \{ \square, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \} \in U$$

$$a \geq 6 \quad \text{ise} \quad (X \leq a) = \Omega \in U$$

dır.  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bir rasgele değişkendir.  $X$  rasgele değişkeni, bir tavla zarı atılması deneyinde üste gelen yüzeydeki nokta sayısı olmaktadır.

**Tanım**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

bir rasgele değişken olmak üzere,

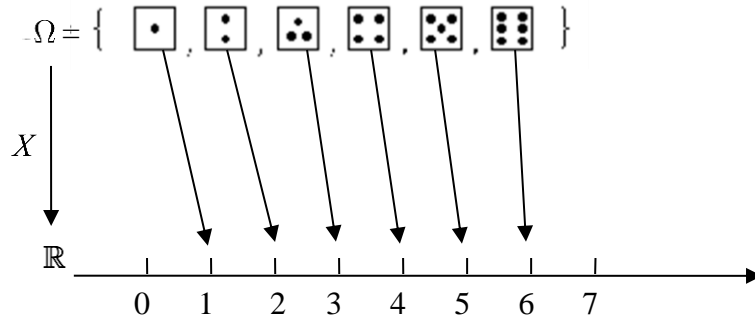
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $X$  rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu denir.

### **Örnek**

$$\Omega = \{ \square, \square, \square, \square, \square, \square \} , \quad U = 2^\Omega , \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

olmak üzere,

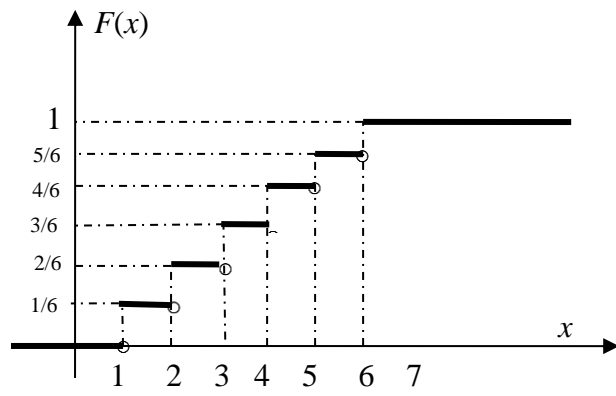


rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{6} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & , \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & , \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & , \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{6} & , \quad 1 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

ve grafięi,



dir.