1 KESİRLİ ANALİZDE BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak bazı özel fonksiyonlar verilecektir.

1.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biridir.

Gamma fonksiyonu $Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \ z \in \mathbb{R}$$

ile tanımlanır.

1.1.1 Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

dir.$\forall \ z \neq 0, -1, -2, ...$ kompleks sayıları için tanımlıdır. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Buradan görülmektedir ki; $\Gamma(1) = 1$ ve $z = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &... \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \end{aligned}$$

dir.

Gamma Fonksiyonunun bir diğer özelliği de $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ noktalarında basit kutup noktalarına sahip olmasıdır.

1.1.2 Gamma Fonksiyonunun Limit Gösterimi

Gamma fonksiyonu ayrıca limit ile de gösterilebilir. $Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!.n^z}{z(z+1)...(z+n)}$$

dir.

1.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu

$$\beta(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\,d\tau,\ \ \operatorname{Re}(z)>0, \operatorname{Re}(w)>0$$

şeklinde tanımlanır.

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$\beta(z,w)=\beta(w,z)$$

dir.

$0<\operatorname{Re}(z)<1$,ve $z\neq 0,\pm1,\pm2,...$olmak üzere

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

dir. Buradan

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\beta(z,1-z)=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{dt}{1-t}$$

elde edilir. Bu integral $0<\operatorname{Re}(z)<1$ de yakınsaktır.

Ödev

1) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, 0<\operatorname{Re}(z)<1$ olduğunu gösteriniz.
2) $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z), (2z\neq 0,-1,-2,...)$ olduğunu gösteriniz.