2.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri

2.1.1 Türev ve İntegralin Ortak İfadesi:

Bu bölümde, klasik analizde farklı olarak verilen iki notasyonun ortak ifadesine yaklaşımlar ifade edilecektir. Bunlar n. basamaktan türev ve n katlı integrallerdir.

Şimdi sürekli bir $y = f(t)$ fonksiyonu alalım. $f(t)$ fonksiyonunun birinci basamaktan türevi

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınırsa

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}$$

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

ve tümevarımla

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(t-rh)$$

bulunur. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

ifadesi Binom sabitleri için genel gösterimdir. Dolayısıyla

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh)$$

elde edilir.

Burada p keyfi bir tamsayı ve n de bir tamsayıdır. $p \leq n$ için

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}$$

dir.

Şimdi $p < 0$ alalım. Uygunluk için

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)......(p+r-1)}{r!}$$

alırsak

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

buluruz.

p yerine $-p$ alırsak

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)$$

elde edilir ve burada p, pozitif tam sayıdır.

Eğer n sabitlenirse,$h \to 0$ olduğunda $f_h^{(-p)}(t)$ sıfıra gider. Sıfırdan farklı bir limite gitmesi için $h \to 0$ iken $n \to \infty$ olduğunu kabul etmemiz gerekir. Bunun için $a \epsilon IR$olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ alınmalıdır. Burada

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) =_a D_t^{(-p)} f(t)$$

gösterimini kullanacağız.

Şimdi bazı özel durumları ele alalım.

p=1 için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)$$

ve

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) =_a D_t^{-1} f(t) = \int\limits_0^{t-a} f(t-z)dz = \int\limits_a^{t} f(\tau)d\tau$$

dir.

$p = 2$ için

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, hf(t-rh)$$

olup burada

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3......(2+r-1)}{r!} = r+1$$

dir. Buradan

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) =_a D_t^{-2} f(t) = \int\limits_0^{t-a} zf(t-z)dz = \int\limits_a^{t} f(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse

$$_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{h \to 0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_a^{t} (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau$$

elde edilir.Bu ifade p-katlı integrali temsil etmektedir. Çünkü

$$\frac{d}{dt}({}_aD_t^{-p}f(t)) = \frac{1}{(p-\tau)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-\tau}f(\tau)d\tau =_a D_t^{-p+1}f(t)$$

ifadeninin a dan t ye integre edilmesiyle

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \int_a^t ({}_aD_t^{-p+1}f(t))dt$$

$${}_aD_t^{-p+1}f(t) = \int_a^t ({}_aD_t^{-p+2}f(t))dt$$

ve

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt\int_a^t ({}_a\ D\ {}_t^{-p+2}f(t))dt \\ &= \int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t ({}_a\ D\ {}_t^{-p+3}f(t))dt \\ &= \int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t dt........\int_a^t f(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$${}_aD_t^pf(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh)$$

dir.

Eğer $p = m$ alırsak m inci basamaktan türevi, eğer $p = -m$ alırsak m katlı integrali elde ederiz.Keyfi Basamaktan İntegraller

$p < 0$ olma durumunu düşünelim. Uygunluk için, p yerine $-p$ yazarsak

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}f(t-rh)$$

elde ederiz.