2.1.2 Keyfi Basamaktan Türevler

$p > 0$ olma durumunu düşünelim. Keyfi basamaktan türevler için amacımız

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^n \binom{p}{r} f(t-rh) $$

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) $$

limitini hesaplamaktır. Burada

$$ f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) $$

dir. Burada

$$ \tbinom{p}{r} = \tbinom{p-1}{r} + \tbinom{p-1}{r-1} $$

dır. Gerekli işlemler yapıldığında

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau $$

elde edilir.

2.1.3 $(t-a)^\beta$ nın Kesirli Türevi:

$\upsilon \epsilon IR$ olmak üzere, $f(t) = (t-a)^\upsilon$ nın Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p (t-a)^\upsilon = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-p+1)} (t-a)^{\upsilon-p} \quad (p<0, \upsilon>-1) \text{ veya } (0 \le m \le p < m+1, \upsilon > m) $$

şeklindedir.

2.1.4 Tamsayı Basamaktan Türevler İle Birleştirme

Yukarıdaki formülde m için sadece bir kısıtlama mevcuttur, yani $m > p-1$ durumu. Şimdi m yerine s alarak tekrar yazarsak

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau)d\tau $$

elde ederiz. Burada $m < p < m+1$ kabul ediyoruz. $f(t)$ fonksiyonunun p basamaktan kesirli türevinin, n tamsayı basamaktan türevi

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) &= {}_aD_t^{p+n} f(t)\\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}\\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

dir.

Benzer şekilde n tamsayı basamaktan türevinin $p-$inci basamaktan kesirli türevi

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}$$

dir.