2.1.5 Kesirli Türevler İle Birleştirilmesi

Şimdi p. basamaktan kesirli türevin, q. basamaktan kesirli türevini göz önüne alalım. Bu da ${}_aD_t^p({}_aD_t^p f(t))$ demektir.

Burada iki durum sözkonusudur: $p < 0$ ve $p > 0$ olma durumu.

İlk durum; (q nun işaretine bağlı olarak) $q > 0$ basamaktan türevin veya$-q > 0$ basamaktan integralin $-p > 0$ basamaktan kesirli integrale uygulanması anlamına gelmektedir.

İkinci durum; bir işlemin $p > 0$ basamaktan kesirli türeve uygulanması anlamına gelmektedir.

Her iki durumda da tamsayı basamaktan diferensiyelin

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}}$$

şeklinde bilinen özelliğine benzer durum elde edilir.

DURUM1: $p < 0$ durumu.İlk olarak $q < 0$ alalım.

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^t (t-\tau)^{-q-1}\,({}_aD_t^p f(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)}\int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi)d\xi \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $0 < n < q < n+1$ olsun. $q-n-1 < 0$ olduğu yerlerde $q = (n+1) + (q-n-1)$ olarak belirtelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{q-n-1}({}_aD_t^p f(t))\right\} \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{p+q-n-1} f(t)\right\} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t)
\end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla $p < 0$ ve herbir reel q için

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) =_a D_t^{p+q} f(t)$$

elde edilir.

DURUM 2: $p > 0$ durumu.

Kabul edelim ki $0 \leq m < p < m+1$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

dır. Buradan görürüz ki $(t-a)^{-p+k}$ fonksiyonları $k = 0, 1, ..., m-1$ için singülerliğe sahiptir. Bu nedenle ${}_aD_t^p f(t)$nin q reel basamaktan türevi yalnızca

$$
f^{(k)}(a) = 0 \qquad , (k = 0, 1, ..., m-1)
$$

durumunda mevcuttur.

Şimdi $q < 0$ alırsak

$$
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}} d\tau
$$

bulunur. Verilen koşullardan

$$
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)
$$

elde edilir.

Şimdi $0 \leq n < q < n+1$ olsun. Kabul edelim ki $f(t)$, verilen koşul sağlasın ve $q-n-1 < 0$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{q-n-1}({}_aD_t^p f(t)) \right\} \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \right\} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece $p < 0$ ise tüm keyfi reel q lar için ${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$ sağlanır. Eğer $0 \leq m < p < m+1$ ise tüm keyfi reel q lar için ${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$ in sağlandığı sonucuna $f(t)$ nın $f^{(k)}(a) = 0$, $(k = 0, 1, ..., m-1)$ koşullarını sağlaması durumunda varılır.