2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi:

Kesirli basamaktan geri farkın limiti olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevi işlem yaparken çok kullanışlı değildir. Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p f(t) = (\frac{d}{dt})^{m+1} \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \qquad (m \leq p < m+1) $$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Riemann-Liouville tanımının nasıl, tamsayı basamaktan integralin ve diferensiyel kavramlarının birleştirilmesi sonucu olarak elde edildiğini inceleyelim.

2.2.1 Tamsayı Basamaktan Türevlerin ve İntegrallerin Birleştirilmesi:

Kabul edelim ki $f(\tau)$ fonksiyonu sürekli ve her sonlu (a, t) aralığında integrallenebilir olsun. $f(t)$ fonksiyonu $\tau = a$ noktasında $r < 1$ basamaktan singülerliğe sahip olsun.

$$ \lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r f(t) = sabit(\neq 0) $$

$$ f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau $$

integrali mevcuttur ve sonlu bir değere sahiptir, öyle ki $t \to a$ için sıfıra eşittir. Aslında $\tau = a + y(t-a)$ değişken değiştirmesi yaparsak ve $\varepsilon = t - a$ alırsak

$$ \begin{aligned} \lim_{t \to a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{t \to a} \int_a^t f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a + y(t-a)) y^{-r} dy = 0 \end{aligned} $$

elde edilir. İki katlı integrali gözönüne alırsak

$$ \begin{aligned} f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_\tau^t d\tau_1 \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} $$

buluruz. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)d\tau_3 \\
&= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

ve tümevarımla Cauchy formülü elde edilir:

$$
f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau.
$$

Şimdi kabul edelim ki $n \geq 1$ sabit ve $k \geq 0$ tamsayı olsun.

Bu durumda

$$
f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau
$$

dır.Burada D^{-k} sembolü ($k \geq 0$) k kez tekrarlanan integrasyonu göstermektedir.

Diğer yandan $n \geq 1$ olmak üzere $k \geq n$ tamsayıları için $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$.basamaktan türevi

$$
f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau
$$

dir.D^k ($k \geq 0$) k kez türevi göstermektedir.

Buradan görülüyor ki, $f^{(-k-n)}(t)$ ve $f^{(-k-n)}(t)$ formülleri biri diğerinin özel bir durumu olarak göz önüne alınabilir.